Toutes les maths

L1
L2
CAPES

ALGÈBRE ET PROBABILITÉS EN 62 FICHES

- Résumés de cours
- + de 200 exercices corrigés
- Méthodologie et conseils

François Cottet-Emard

+ EN LIGNE
OFFERT

Exercices corrigés, Problèmes, Démonstrations

deboeck SUPÉRIEUR

Toutes les maths
Algèbre et Probabilités en 62 fiches

deboeck SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur :

Toutes les maths pour bien commencer sa licence, Cottet-Emard F., 2017
Les 100 exercices de maths pour bien commencer sa licence, Costantini G., 2021
Toutes les maths – Analyse en 40 fiches, Cottet-Emard F., 2021

Toutes les maths
Algèbre et Probabilités en 62 fiches

François Cottet-Emard

de boeck SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : septembre 2021
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2021/13647/110

ISBN : 978-2-8073-2850-1

Sommaire

Introduction

Cet ouvrage contient l'algèbre linéaire ou générale, la théorie des graphes et les probabilités couramment étudiées dans les années L1L2 des Universités et dans les deux années des classes préparatoires. Il est formé de 62 fiches, ce que l'on appelait autrefois chapitres, contenant chacune le cours avec de nombreux exemples et des exercices corrigés. La section Algèbre est découpée en trois grandes parties : polynômes et outils généraux, algèbre linéaire et bilinéaire, arithmétique et groupes. L'ouvrage se poursuit par une partie consacrée à la théorie des graphes non orientés, jusqu'aux parcours particuliers, graphes hamiltoniens, graphes eulériens, parcours de moindre coût. Il se termine par une partie consacrée aux probabilités finies, discrètes ou continues, avec les lois classiques, ainsi que les tests d'hypothèses standards (loi binomiale, normale, exponentielle, Poisson, Student, χ^2, Fisher), et une étude simplifiée des chaînes de Markov. Pour cette dernière partie, on rappelle que le mot « événement » s'écrit aussi « évènement », et que les deux écritures vont se croiser.

Les prérequis sont simplement ceux du Lycée, Terminale S ou ES.

Son originalité et sa modernité viennent de ses deux supports, papier et en ligne. Le cours et certains exercices immédiats et vitaux, il y en a 206, sont sur le support papier, mais chaque fiche renvoie à des données en ligne : certains exemples et certains exercices avec leurs corrigés, il y en a 134, ont été renvoyés en ligne. Il en va de même de la grande majorité des démonstrations, renvoyées en ligne. L'ouvrage contient aussi 24 grands problèmes récapitulatifs, entièrement renvoyés aussi en ligne. Environ 20% du contenu de l'ouvrage se trouve ainsi en ligne dans des fichiers PDF. Cette partie en ligne contient, du moins pour les probabilités et tests d'hypothèse, de nombreuses simulations informatiques écrites de façon très simple avec un logiciel gratuit.

Cette partie en ligne répond à une exigence actuelle, un livre de mathématiques ne peut plus être entièrement sur support papier, et doit utiliser les outils des nouvelles technologies et les logiciels modernes qui remplacent les calculs faits autrefois à la main. Ces renvois en ligne incitent le lecteur à une curiosité nouvelle et à utiliser les nouvelles technologies de l'information. Par ailleurs, les textes en ligne sont aussi plus colorés, plus aérés et conviviaux, puisque la contrainte du nombre de pages et des couleurs n'a plus grande importance. Cette grande partie en ligne permet aussi d'alléger l'ouvrage papier, le rendant plus maniable.

Attention, les renvois en ligne concernent des notions aussi importantes que celles exposées sur papier dans l'ouvrage. Les exemples et les exercices en ligne ne sont ni des évidences trop simples, ni au contraire des exercices trop compliqués qui seraient uniquement des compléments. Ce sont des exemples et exercices comme les autres. On le voit très bien à leur numérotation dans chaque fiche : elle respecte une alternance entre les numéros sur papier et les numéros en ligne. Certaines fiches ont d'ailleurs plus d'exercices en ligne que sur papier.

Certaines démonstrations courtes à lire impérativement en même temps que l'énoncé du théorème se trouvent dans la fiche de cours, sur papier. Les grosses démonstrations, plus longues ou qui peuvent attendre un peu pour la compréhension du théorème, sont systématiquement en ligne.

D'une façon générale, cette double découpe de l'ouvrage doit titiller le lecteur et l'inciter à adopter les deux démarches, une approche visuelle instantanée sur papier et une recherche (très rapide en pratique) en ligne.

Un mode d'emploi très détaillé de l'accès en ligne est donné après cette introduction globale.

Il n'y a pas d'ordre imposé par un quelconque programme officiel, comme c'est le cas dans l'enseignement secondaire. L'ordre respecte ici une logique linéaire de progression des difficultés, mais n'a rien de strict. En particulier, l'arithmétique et l'algèbre générale et les graphes, qui se trouvent en fin de volume, n'ont pas de vocation à être étudiés spécialement en année L2, mais sont souvent abordées en L1 dans certaines universités.

Par exemple, les polynômes, notion fondamentale, sont répartis sur trois fiches : au début du volume se trouve les définitions vitales dont on a besoin dans toute l'algèbre (opérations, racines, multiplicité, factorisation et théorème de d'Alembert...). La notion de polynômes premiers entre eux est renvoyée au tiers du volume, pour être utilisée dans les polynômes d'endomorphisme et la réduction des matrices. La notion de PGCD se trouve au début de l'algèbre générale, exposée dans une fiche regroupant cette notion de divisibilité des polynômes avec celle des entiers relatifs, puisque ce sont deux fois les mêmes notions, simplement dans deux anneaux différents mais très semblables. Les fractions rationnelles sont exposées en fiche 4, en début de volume, essentiellement pour pouvoir les décomposer en éléments simples et dans l'optique de leur utilisation dans le calcul des primitives, et donc en analyse. L'analyse est l'objet du second volume de la collection, dans la même optique de la version papier et de celle en ligne.

Le volume contient certaines notions marquées ASPL , à sauter en première lecture. Il s'agit de compléments qui sont intéressants dans l'optique de la poursuite d'études en année L3 de mathématiques ou bien de simple culture générale. Ce ne sont pas des notions basiques devant être maîtrisées en L1L2.

Un formulaire se trouve en fin de volume. Il contient les grandes formules classiques à maîtriser absolument en algèbre comme en analyse, la majorité d'entre elles venant du Lycée. Il contient aussi une liste des instructions basiques du langage Xcas (logiciel gratuit à télécharger), langage qui est utilisé pour effectuer des calculs ou des simulations probabilistes. La fiche 53, par ailleurs, est entièrement consacrée à la syntaxe des grandes lois de probabilités implémentées dans les logiciels ou tableurs Excel, Open Office et Xcas. Ces logiciels remplacent les tables numériques d'autrefois, mais la manipulation antérieure ne doit pas être ignorée : par exemple, la table de la loi normale centrée réduite, très facile d'utilisation et dont certaines valeurs doivent être connues par cœur, a été conservée. À titre de comparaison imagée, la calculatrice ne peut pas remplacer la maîtrise du calcul mental.

Descriptif des ressources en ligne

Le texte papier contient le cours, avec des exemples, certaines simulations informatique, les énoncés des théorèmes, certaines démonstrations et des exercices. La partie en ligne contient certains exemples, la majorité des simulations informatiques, la majorité des démonstrations (les plus longues), certains exercices et les problèmes récapitulatifs. À chaque fiche papier sont a priori associées deux fichiers en ligne, un contenant les exemples et/ou les simulations et/ou les démonstrations, le second contenant les exercices et/ou des simulations renvoyés en ligne. Les fiches ne contiennent pas toutes à la fois des exemples en ligne, des démonstrations en ligne et des exercices en ligne, cela dépend de chaque contenu pédagogique. Il y a donc a priori deux liens pour chaque fiche, mais il y a aussi des fiches avec une seule ressource en ligne et quelques fiches sans aucune ressource en ligne.

L'existence de ressources en ligne au niveau du cours et/ou au niveau des exercices est indiquée par les textes **J'apprends en ligne** pour la partie cours et/ou **Je m'entraîne en ligne** pour les exercices.

J'apprends en ligne $\hookrightarrow$ **(*Lien et QR code indiqués*)**

Ce lien concerne la partie « cours », et oriente vers les exemples, les démonstrations et les éventuelles simulations informatique de la partie cours de la fiche. Il est donné en deuxième page de la fiche par une adresse et un QR code.

Dans le courant de la partie « cours » de la fiche, pour chaque exemple ou démonstration ou simulation concernés, une indication renvoie vers le complément en ligne, sans rappeler cette adresse. Il s'agit de :

Exemple 3 en ligne

Cette indication renvoie vers l'exemple 3 de la fiche courante, qui se trouve donc en ligne. Tous les exemples renvoyés en ligne d'une même fiche se trouvent en première page du fichier PDF « cours en ligne » associé à la fiche. Ils sont classés par ordre de numéros, à savoir l'ordre de la progression du cours.

Démonstration en ligne

Cette indication renvoie vers la démonstration d'un résultat, clairement identifié par le même titre/numéro de théorème dans la fiche papier et dans le fichier PDF en ligne. Les démonstrations sont aussi dans l'ordre de la progression du cours, et situées après la page des exemples.

Une simulation Xcas est donnée en ligne

Ce renvoi, moins fréquent que les précédents, indique qu'un point de l'ouvrage papier est illustré par une simulation informatique donnée en ligne. Elle se trouve dans le fichier PDF « cours » accessible par le lien donné en début de fiche.

Je m'entraîne en ligne ↪ (*Lien et QR code indiqués*)
exercices supplémentaires (*numéros indiqués*)

La seconde partie de chaque fiche papier est consacrée aux exercices, avec d'abord les énoncés et ensuite les corrigés. Les exercices renvoyés en ligne sont dans un fichier PDF accessible par le lien et le QR code indiqués comme ci-dessus en tête de la page des énoncés. Les numéros des exercices en ligne sont précisés dans la seconde ligne « exercices supplémentaires ».

Prenons (par exemple) le cas de l'indication « exercices supplémentaires 3,5 » placée en tête de la liste des exercices : elle renvoie vers les exercices 3 et 5 en ligne de la fiche courante. Dans le cas où la fiche compte (par exemple) au total 8 exercices, les numéros 3 et 5 sont renvoyés en ligne, et toute la numérotation est conservée dans la version papier (qui contient donc les exercices numérotés 1,2,4,6,7,8) comme en ligne (les deux exercices sont numérotés 3 et 5). L'idée est de situer les exercices dans une même progression pédagogique, pour bien montrer que les exercices en ligne ne sont pas plus difficiles que ceux sur papier, ni de simples compléments.

Une simulation Xcas est donnée en ligne

Certains exercices du volume papier sont aussi illustrés par une simulation en ligne, qui se trouve dans le fichier des exercices en ligne de la fiche. Cette indication se trouve, dans le volume papier, au niveau de l'énoncé ou du corrigé d'un exercice.

Problèmes récapitulatifs ↪

Les 24 problèmes récapitulatifs de l'ouvrage sont stockés, énoncés et corrigés, dans un même fichier PDF, appelé fiche 62 et dont l'accès est précisé à la fin de la page suivante « Se connecter aux ressources en ligne ».

Se connecter aux ressources en ligne

Voici comment accéder à un fichier PDF se trouvant en ligne.
Prenons l'exemple de la fiche 50, à qui est associé un fichier PDF contenant les exemples et/ou les simulations et/ou les démonstrations en ligne de la fiche et un fichier PDF contenant les exercices et/ou simulations en ligne de cette même fiche. Ce sera le même principe pour toutes les autres fiches.

Accès au fichier DMAlgebre50 du « cours » : le fichier PDF des exemples, démonstrations et éventuelles simulations en ligne de la partie « cours » de la fiche 50 s'appelle DMAlgebre50. On y accède en tapant, dans la barre des adresses du navigateur :

www.lienmini.fr/dmalgebre50

ou bien on scanne le QR code qui se trouve en deuxième page de la fiche 50 dans le volume papier. Le lien ci-dessus est aussi rappelé en deuxième page de la fiche.

Accès au fichier EXAlgebre50 des exercices : le fichier PDF des exercices et leurs simulations en ligne de la fiche 50 s'appelle EXAlgebre50. On y accède en tapant, dans la barre des adresses du navigateur :

www.lienmini.fr/exalgebre50

ou bien on scanne le QR code qui se trouve en tête des exercices de la fiche 50 dans le volume papier. Le lien ci-dessus est aussi rappelé au début de la page des énoncés des exercices.

D'une façon générale :
Tout renvoi en ligne se trouvant dans la partie « cours » d'une fiche est accessible à partir du lien/QRcode placé en deuxième page de la fiche.
Tout renvoi en ligne se trouvant dans la partie « exercices » d'une fiche est accessible à partir du lien/QRcode placé en tête de la page des énoncés des exercices.

Accès aux problèmes récapitulatifs : le fichier PDF des problèmes en ligne du volume s'appelle ProblemesAlgebre. On y accède en tapant, dans la barre des adresses du navigateur :

www.lienmini.fr/problemesalgebre

ou bien en scannant le QR code suivant :

COURS 1 Ensembles et applications, structures algébriques

[MOTS-CLÉS : QUANTIFICATEURS, APPLICATION, RESTRICTION, IMAGE DIRECTE, RÉCIPROQUE, INJECTION, SURJECTION, BIJECTION, LOI DE COMPOSITION, ASSOCIATIVITÉ, ÉLÉMENT NEUTRE, INVERSE, COMMUTATIVITÉ, GROUPE, ANNEAU, CORPS, SOUS-GROUPE]

E et F sont deux ensembles non vides quelconques. Une application f de E dans F est un procédé quelconque associant à tout élément de E un unique élément de F. Rappelons que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ celui des rationnels (quotients de deux entiers), $\mathbb{R}$ les nombres réels et $\mathbb{C}$ les nombres complexes. La fiche présente ensuite les structures importantes de groupe, d'anneau et de corps, mais sans entrer dans les détails. Des fiches d'algèbre leur seront consacrées plus loin.

1 Quantificateurs

- On est souvent confronté, dans un ensemble E à l'une des deux situations « pour tout élément x de E, alors » ou « il existe au moins un élément x de E tel que ».

Les deux expressions « pour tout » et « il existe au moins » s'appellent quantificateurs. Le premier s'appelle quantificateur universel et s'écrit $\forall$; le second s'appelle quantificateur existentiel et se note $\exists$.

Méthodologie

Au lieu de « pour tout », on dit aussi « quel que soit ». On se contente souvent de dire « il existe » au lieu de « il existe au moins ». Mais ce « au moins » est toujours sous-entendu.

Exemple 1 : La proposition « pour tout réel x, on a $x^2+3>0$ » s'écrit $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2+3>0)$.

Exemple 2 : « il existe au moins un réel x tel que $3x^2-45x>467$ » s'écrit $(\exists x \in \mathbb{R} \mid 3x^2-45x>467)$ ou bien $(\exists x \in \mathbb{R})(3x^2-45x>467)$. Le trait vertical $\mid$ se lit « tel que ». La seconde écriture est *a priori* moins détaillée, mais elle est pratique lorsque l'expression suivant « tel que » est longue et compliquée.

Méthodologie

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont des raccourcis mathématiques au même titre que les signes $=$ ou $\leq$.

- Les quantificateurs sont souvent « imbriqués », par exemple :

$$(\forall x \in \cdots)(\exists y \in \cdots)(\text{tel que} \cdots)$$

J'apprends en ligne
www.lienmini.fr/dmalgebre1

Méthodologie

Dans une telle écriture, le « y » en seconde position **dépend** du « x » en première position.

Exemple 3 en ligne

- On peut aussi avoir $(\exists x \in \cdots)(\forall y \in \cdots)$(tel que$\cdots$). Dans ce cas, le « y » ne dépend pas de x, puisqu'il sera quelconque.

Exemple 4 : La propriété « la fonction $f : x \mapsto x + 7\sin x$ est minorée sur $[1,5]$ » signifie : il existe un réel m (dont ne connaît a priori pas la valeur) tel que, pour tout $x \in [1,5]$ on ait $f(x) \geq m$. Cela se quantifie en $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in [1,5])(f(x) \geq m)$.

Exemple 5 en ligne

- Attention à l'ordre des quantificateurs, quand ils sont imbriqués :
  - $(\forall x \in E)(\exists y \in E)(\mathcal{P}(x,y))$ signifie que **pour tout** $x \in E$ on peut trouver **au moins** un $y \in E$ (dépendant a priori de x) tel que la propriété $\mathcal{P}(x,y)$ soit vraie.
  - Mais $(\exists y \in E)(\forall x \in E)(\mathcal{P}(x,y))$ signifie qu'il existe **au moins un** $y \in E$ tel que la propriété $\mathcal{P}(x,y)$ est vraie **pour tout** $x \in E$. C'est totalement différent.
- Cependant $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\mathcal{P}(x,y))$ signifie la même chose que $(\forall y \in E)(\forall x \in E)(\mathcal{P}(x,y))$, et on peut aussi écrire $(\forall x,y \in E)(\mathcal{P}(x,y))$.

Méthodologie finale

La quantification $(\forall x \in E)(\mathcal{P}(x))$ traduit que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout élément de E.
La quantification $\exists x \in E \mid \mathcal{P}(x)$, qui s'écrit aussi $(\exists x \in E)(\mathcal{P}(x))$ traduit qu'il existe au moins un élément de E pour lequel la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

2 Quantificateurs et négation

- La négation (ou contraire) de « pour tout x de E, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie » est évidemment « il existe au moins un élément x de E tel que $\mathcal{P}$ est fausse ». Le contraire de « il existe au moins un élément x de E tel que $\mathcal{P}$ est vraie » est « pour tout x de E, la propriété $\mathcal{P}$ est fausse ».

La négation de $(\forall x \in E)(\mathcal{P}(x))$ est $(\exists x \in E \mid \text{Non } \mathcal{P}(x))$.
La négation de $(\exists x \in E \mid \mathcal{P}(x))$ est $(\forall x \in E)(\text{Non } \mathcal{P}(x))$.

Exemple 6 : La négation de $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 3x + 2 \geq 0)$ est $(\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 < 0)$ ou encore $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 - 3x + 2 < 0)$.

Exemple 7 : La négation de $(\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0)$ est $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + 1 \neq 0)$.

- Ces deux exemples et la logique courante montrent que **Le contraire de $\forall$ est $\exists$ et réciproquement.**

Méthodologie
Le fait d'être dans l'ensemble E ne se remet pas en cause lors de la négation.

3 Restriction d'une application à une partie de E

Si $A \subset E$ est une partie non vide de E, la restriction de f à A est l'application de A dans F définie par $x \in A \mapsto f(x)$.

Exemple 8 : Soit $E = F = \mathbb{R}$, et f définie par $f(x) = |x^2 - 1|$. La restriction de f à $A = [-1,1]$ est l'application de A dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 1 - x^2$.

Méthodologie
La restriction de f à A se note souvent $f_{|A}$ Il ne serait pas correct de continuer à la noter f.

4 Image directe, image réciproque d'une partie par $f : E \mapsto F$

- Soit A une partie de l'ensemble E de départ.

L'ensemble des $f(a)$ lorsque a décrit A s'appelle image de A par f : c'est une partie de F. On note $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.

Exemple 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour $A = [0,3]$, on a $f(A) = [0,9]$; pour $A = [-2,3]$ ou $A = [-3,1]$, on a toujours $f(A) = [0,9]$, comme le montre une étude rapide de la fonction carré sur $\mathbb{R}$.

Exemple 10 en ligne

- Soit B une partie de l'ensemble d'arrivée F.

L'image réciproque de B par f est la partie $f^{-1}(B)$ de l'ensemble E de départ formée des x tels que $f(x) \in B$: $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Danger de la notation

La notation $f^{-1}(B)$ n'a rien à voir avec le fait que f soit ou non une bijection de E sur F, notion qui sera détaillée à partir du paragraphe 8.

Exemple 11 : Soit $E = [-\pi,\pi]$, $F = \mathbb{R}$, $B = [1/2;1]$ et f la fonction cosinus. Les variations montrent que $f^{-1}(B) = [-\pi/3;\pi/3]$.

Exemple 12 : Avec la fonction carrée de $\mathbb{R}$ dans lui-même, on a $f^{-1}([4,9]) = [-3,-2] \cup [2,3]$ et $f^{-1}([-74,4]) = [-2,2]$.

- Si $A_1 \subset A_2$ dans E, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$. Si $B_1 \subset B_2$ dans F, alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- On retiendra finalement les relations entre les images directes ou réciproques de parties et les opérateurs de réunion et d'intersection :

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \qquad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \qquad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

- Ces propriétés sont démontrées en exercice. Elles s'étendent à une intersection ou une réunion d'une famille quelconque, même infinie, de parties de E et de F.

Méthodologie

Seule l'image directe d'une intersection pose un problème. Sinon, tout est naturel, avec des égalités.

5 Composition des applications

- Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.

L'application de E dans G associant à chaque élément $x \in E$ l'élément $g(f(x))$ de G s'appelle composée de f par g, et se note $g \circ f$.

Exemple 13 : Soit $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos x$ et $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x^2 - 1$. La composée $g \circ f$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 2(\cos x)^2 - 1 = \cos 2x$, d'après les formules classiques de trigonométrie.

Exemple 14 : Avec les notations de l'exemple 13, la composée $f \circ g$ est l'application de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ définie par $f \circ g(x) = f(2x^2 - 1) = \cos(2x^2 - 1)$.

Exemple 15 en ligne

Méthodologie

Même dans les cas où les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ ont un sens toutes les deux, on a généralement $f \circ g \neq g \circ f$. Attention à l'ordre de composition des applications.

- La composition des applications est *associative* :

Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to H$. On a toujours $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

- Ceci découle des définitions $\Big(f \circ (g \circ h)\Big)(x) = f[(g \circ h)(x)] = f\Big(g(h(x))\Big) = (f \circ g)(h(x))$ pour tout $x \in E$.

6 Application injective de E dans F

On dit que $f : E \mapsto F$ est injective lorsque deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f : $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- On peut aussi dire que l'égalité $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$.

Méthodologie

Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au maximum une solution x dans E.
On dit aussi que f est une injection de E dans F.

Exemple 16 : L'application f de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ définie par $f(x) = \cos x$ n'est pas injective. En effet, on a $f(0) = f(2\pi)$.

Exemple 17 : Par contre, le cosinus est une application injective de $[0,\pi]$ dans $[-2,1]$: pour $-2 \leq y \leq 1$, l'équation $y = \cos x$ admet soit aucune solution soit une unique solution x appartenant à $[0,\pi]$.

Exemple 18.a en ligne

Méthodologie et Philosophie

Via l'injection f, l'ensemble d'arrivée F contient une copie fidèle de l'ensemble de départ E, à savoir l'ensemble des $f(x)$ quand x décrit E.
Comme il y a de la place dans F pour mettre une copie de E, l'ensemble d'arrivée F est « plus gros » que l'ensemble E de départ.

- Écrire la définition d'une application injective en utilisant les quantificateurs, ne présente que peu d'intérêt : $\Big(\forall\, x_1,x_2 \in E\Big)\Big(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\Big)$ ou $\Big(\forall\, x_1,x_2 \in E\Big)\Big(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\Big)$.

7 Application surjective de E sur F

On dit que $f : E \to F$ est surjective lorsque tout élément de F est l'image d'au moins un élément de E par f.

Exemple 19 : Le cosinus est une application surjective de $\mathbb{R}$ (ou de $[0,2\pi]$) sur $[-1,1]$. L'application carré $x \mapsto x^2$ n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, puisque les réels négatifs ne sont pas les carrés de réels. Mais c'est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[0,+\infty[$, puisque tout réel positif ou nul est le carré d'au moins un réel.

Méthodologie

La surjectivité se quantifie en $(\forall y \in F)(\exists x \in E \mid y = f(x))$.
Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E. Un tel $x \in E$ est appelé antécédent de y.
On dit aussi que f est une surjection de E **sur** F.

Exemple 18.b en ligne

8 Bijection de E sur F

On dit que $f : E \to F$ est bijective quand elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit, tout élément de F est image d'un et d'un seul élément de E.

Exemple 20 : Le cosinus est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. En effet, toute droite horizontale $y = m$ avec $-1 \leq m \leq 1$ coupe une et une seule fois la courbe du cosinus entre 0 et π.

Méthodologie

La qualité « surjectif » assure l'existence d'au moins un antécédent à tout $y \in F$, et la qualité « injectif » assure son unicité.

Exemple 21 : Soit f définie par $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 7$. Une étude de fonction montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même (elle est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$.)

9 Bijection réciproque

- Soit f une bijection de E sur F. Tout élément $y \in E$ est l'image d'un unique élément $x \in E$. On peut donc définir une application de F dans E, associant à tout $y \in F$ son antécédent $x \in E$:

Théorème 1. L'application f^{-1} de F dans E associant à tout élément $y \in F$ son unique antécédent par f est une bijection de F sur E. On a $x = f^{-1}(y)$ si et seulement si $y = f(x)$.
C'est une bijection de F sur E, appelée bijection réciproque de f, et elle vérifie les relations $(\forall x \in E)(f^{-1}[f(x)] = x)$ et $(\forall y \in F)(f[f^{-1}(y)] = y)$.

Démonstration en ligne

Exemple 22 : La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. En effet, pour tout $y \geq 1$, l'équation $y = x^2 + 1$ admet une et une seule solution dans $[0, +\infty[$, à savoir $x = \sqrt{y^2 - 1}$. La bijection réciproque f^{-1} est définie sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $[0, +\infty[$ et est décrite, en mettant plutôt la lettre x comme variable, par $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Méthodologie

La variable de départ d'une application est plus souvent notée x que y, surtout dans les fonctions !

- En notant I_E l'application identité de E, définie par $I_E(x) = x$ pour tout $x \in E$, et de même pour I_F, on peut aussi écrire $f \circ f^{-1} = I_F$ et $f^{-1} \circ f = I_E$, en utilisant la notation de la composition.
- Dans le cas particulier où f est une bijection de E sur lui-même, on a $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout x de E.

Exemple 23 : $f : x \mapsto 2x - 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(x) = (x + 1)/2$.

- Voici deux résultats évidents par définition :
  - On a $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$: la bijection réciproque de la bijection réciproque est la fonction initiale.
  - Si f est une bijection de E sur F et g une bijection de F sur G, alors la composée $g \circ f$ est une bijection de E sur G, et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

10 Loi de composition interne dans un ensemble

- Une loi de composition interne $*$ dans un ensemble non vide E est un procédé associant à deux éléments quelconques x,y de E un nouvel élément noté $x * y$. C'est une application de $E \times E$ dans E.

Exemple 24 : L'addition « $+$ » dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une loi de composition interne. Il en va de même de la multiplication « $\times$ ». Dans l'ensemble E des bijections d'un ensemble F dans lui-même, la composition « $\circ$ » est une loi de composition interne.

- La loi de composition interne $*$ est dite associative quand on a $(x * y) * z = x * (y * z)$ pour tous x,y,z de E.

Exemple 25 : Les trois lois de composition interne « $+$, $\times$,$\circ$ » de l'exemple 24 sont associatives.

Méthodologie

Une loi de composition interne non associative ne présente aucun intérêt.

- Un élément neutre pour la loi de composition interne $*$ est un élément $e \in E$ tel que $x * e = e * x = x$ pour tout x de E.

Méthodologie

L'élément neutre, s'il existe, est nécessairement unique.

En effet, si e et e' sont neutres, on a $e * e' = e = e'$ par définition.

Exemple 26 : Pour les additions de l'exemple 24, l'élément neutre est le « 0 » classique ; pour la multiplication, il s'agit du « 1 » tout aussi connu. Pour l'ensemble des bijections d'un ensemble F dans lui-même, il s'agit de l'application identité définie par $I_F(x) = x$ pour tout $x \in F$.

- Soit E muni d'une loi de composition interne $*$ et d'un élément neutre e. On dit qu'un élément $x \in E$ est inversible quand il existe un élément $y \in E$ tel que $x * y = y * x = e$. L'élément y est l'inverse de x, de même que x est l'inverse de y.

Méthodologie

Si la loi de composition interne $*$ est associative et admet un élément neutre, alors l'inverse d'un élément, quand il existe, est unique.

En effet, partons de $x*y = y*x = e$ et $x*z = z*x = e$. Il vient $z*(x*y) = z*e = z$, soit $(z * x) * y = z$ ou encore $e * y = z$, à savoir finalement $y = z$.

- On dit que $*$ est commutative lorsque $x * y = y * x$ pour tous x,y de E.

Exemple 27 : Dans l'exemple 24, l'addition et la multiplication sont commutatives. Ce n'est pas le cas de la composition des bijections de F : en général, on a $f \circ g \neq g \circ f$.

11 Structure de groupe

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ qui est associative, qui possède un élément neutre, et pour laquelle tout élément admet un inverse.

associativité	:	$\forall x,y,z \in G,\ x * (y * z) = (x * y) * z$
neutre	:	il existe $e \in G$ tel que $x * e = e * x = x$ pour tout $x \in G$
inverse	:	$(\forall x \in G)(\exists y \in G \mid x * y = y * x = e)$

- Si la loi $*$ est commutative, on dit que G est un groupe commutatif ou groupe abélien.

Exemple 28 : Les ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ munis de l'addition sont des groupes abéliens. L'élément neutre est le « 0 » et l'inverse de x s'appelle *opposé* de x, et se note $-x$.

Exemple 29 en ligne

Exemple 30 : L'ensemble G des bijections de F sur lui-même est un groupe non commutatif pour la loi de composition des applications, celle définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. L'inverse de $f \in G$ est la bijection réciproque notée f^{-1}.

Point **Notation**

La loi de composition interne d'un groupe se note souvent avec le « . » ou le « $\times$ » de multiplication. Quand on la note $+$, cela sous-entend que le groupe est commutatif.

Exemple 31 : Les ensembles de polynômes à coefficients réels ou à coefficients complexes sont des groupes abéliens pour l'addition des polynômes. Ils sont étudiés en fiches 2 et 3.

Exemple 32 en ligne

Méthodologie

Dans un groupe non commutatif, on a $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$. Attention à l'ordre !

12 Structure d'anneau

Un anneau est un ensemble A muni d'une addition « $+$ » lui conférant une structure de groupe additif commutatif, et d'une multiplication « . » associative et distributive par rapport à l'addition, à savoir vérifiant pour tous x,y,z de A :

$$x.(y+z) = x.y + x.z \quad \text{et} \quad (y+z).x = y.x + z.x.$$

- Si la multiplication est commutative, on dit que l'anneau est commutatif. Si elle possède un élément neutre « 1 », on dit que l'anneau est unitaire.

Exemple 33 : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs unitaires. Il en va de même pour l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, comme on le verra dans la fiche 2.

Exemple 34 en ligne

Exemple 35 : L'ensemble de *toutes* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un anneau unitaire commutatif pour l'addition et la multiplication, $f+g$ et $f\times g$ étant définies par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ et $(f\times g)(x)=f(x)g(x)$, pour tout x.

- Si le produit de deux éléments **non nuls** est toujours non nul, on dit que l'anneau est intègre. Dans un anneau non intègre, on peut trouver deux éléments non nuls dont le produit est nul.

Exemple 36 : $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ et les anneaux de polynômes sont intègres. On construira en fiche 6 un anneau non intègre, celui des matrices carrées de dimension n donnée.

13 Structure de corps

- Soit A un anneau **unitaire**, et $A^* = A\setminus\{0\}$ l'ensemble des éléments non nuls de A.

> On dit que A est un corps lorsque, en plus de la structure d'anneau unitaire, l'ensemble A^* est un groupe pour la multiplication.

Exemple 37 : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps. Ils sont commutatifs, puisque la multiplication est commutative.

Méthodologie

Un corps est un anneau unitaire dans lequel tout élément non nul a un inverse. Un corps se note généralement K ou F (pour Field en anglais).

Exemple 38 : $\mathbb{Z}$ est un anneau, mais n'est pas un corps. En effet, seuls ±1 ont un inverse pour la multiplication.

14 Sous-groupe, sous anneau

- Une partie H d'un groupe $(G,\times)$ est un sous-groupe de G quand c'est encore un groupe pour la loi de composition interne de G. Pour cela il faut et il suffit que H soit stable pour la loi, à savoir :

> $\forall x,y\in H\ ,\ x\times y\in H$ et $\forall x\in H\ ,\ x^{-1}\in H$

Mais on peut aller plus vite :

Méthodologie

Ceci se condense en $\forall x,y \in H\ ,\ x \times y^{-1} \in H$.

- Si la loi est l'addition, cette CNS s'écrit : $\forall x,y \in H\ ,\ x - y \in H$.

Exemple 39.a : L'ensemble G des permutations de $F = \{1,2,\cdots,n\}$, à savoir l'ensemble des bijections de F sur lui-même, est un groupe pour la composition $\circ$ des applications.

Exemple 39.b : Le sous-ensemble H de G formé des permutations f vérifiant $f(1) = 1$ est un sous-groupe de G. En effet, si f et g conservent le « 1 », la bijection réciproque f^{-1} le fait aussi, et il en est de même de la composée $g \circ f^{-1}$.

Exemple 39.c en ligne

- Plus généralement, une partie H d'un anneau (ou d'un corps) K est encore un anneau (ou un corps) lorsque la somme et le produit de deux éléments de H est encore dans H, et que l'opposé (et en plus, pour un corps, l'inverse d'un élément non nul) d'un élément de H est encore dans H. On dit que H est un sous-anneau (ou un sous-corps) de K.

Exemple 40 : $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ qui est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Les polynômes à coefficients réels forment un sous-anneau de l'anneau des polynômes à coefficients complexes.

15 Compléments de culture générale

- Voici quelques résultats amusants et hors programme sur les bijections :
- Théorème de Cantor-Bernstein : s'il existe une **injection** de E dans F et une **injection** de F dans E, alors il existe une **bijection** de E sur F.

Exemple 41 : Soit $E =]0,1]$ et $F = [0,1]$. L'application $x \in E \mapsto x \in F$ est injective. L'application $x \in [0,1] \mapsto (x+1)/3$ est une injection de F dans E. Il existe donc une bijection de $]0,1]$ sur $[0,1]$. Mais elle est difficile à expliciter !

- Il existe des bijections de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$, et même de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{N}$. D'une certaine façon à préciser avec les ensembles infinis, il y a « autant » de nombres entiers que de rationnels, bien que l'on ait envie de dire qu'il y a bien plus de rationnels que d'entiers…
- Mais il n'existe pas de bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{N}$: il y a « beaucoup plus » de réels que de nombres entiers ou de rationnels.

1 EXERCICES

Je m'entraîne en ligne

Exercices supplémentaires 2,5,7,8,9
www.lienmini.fr/exalgebre1

Exercice 1

Soient A,B deux parties d'un ensemble E. Écrire avec des quantificateurs que A est incluse dans B, ainsi que son contraire.

Exercice 3

Traduire par une phrase « en bon français » la quantification :

$$(\forall a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N}^*)(\exists q \in \mathbb{N})(\exists r \in [0..b-1])(a = bq + r)$$

Exercice 4

Prouver chacune des quatre affirmations de la fin du paragraphe 5. On se placera avec des ensembles E et F quelconques, avec f quelconque. Pour $f(A_1 \cap A_2)$, on donnera un contre-exemple simple pour l'égalité ; pour les autres, on montrera la double inclusion.

Exercice 6

Soit $n \geq 2$ entier. Montrer qu'il n'existe pas de bijection d'un ensemble à $n-1$ éléments sur un ensemble à n éléments. On fera une récurrence sur n.

1 CORRIGÉS

Exercice 1

Il s'agit de $(\forall a \in A)(a \in B)$ puis de $(\exists a \in A \mid a \notin B)$ ou $(\exists a \in A)(a \notin B)$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel a et tout entier $b \geq 1$, il existe un entier q (quotient) et un entier r dans $[0..b-1]$ (reste) tels que $a = bq + r$: c'est l'existence de la division euclidienne de a par b. La quantification ne traduit pas l'unicité.

Exercice 4

1. Soit $a \in A_1 \cap A_2$: l'image $f(a)$ est dans $f(A_1)$ et dans $f(A_2)$, et donc dans leur intersection. On a l'inclusion donnée. Prenons cependant A_1 et A_2 disjointes, et f constante égale à b sur E. L'image $f(A_1 \cap A_2)$ est l'ensemble vide, alors que $f(A_1) \cap f(A_2) = \{b\}$.

2. Soit $x \in A_1 \cup A_2$: son image est soit dans $f(A_1)$ soit dans $f(A_2)$. Elle est donc dans leur réunion : on a $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. Réciproquement, soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$: il est (par exemple) dans $f(A_1)$, et s'écrit alors $y = f(a_1)$ où $a_1 \in A_1$ et est donc dans $A_1 \cup A_2$: on a $y \in f(A_1 \cup A_2)$ et l'inclusion en sens inverse. On a les deux inclusions, et l'égalité demandée.

3. Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. L'image $y = f(x)$ est dans $B_1 \cap B_2$, i.e. dans B_1 et dans B_2 : x est alors dans $f^{-1}(B_1)$ et dans $f^{-1}(B_2)$, i.e. dans leur intersection. On a $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$: il est dans chacun des deux ensembles, ce qui implique que son image est à la fois dans B_1 et dans B_2, et donc dans $B_1 \cap B_2$. L'élément x est donc dans $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$: on a l'inclusion en sens inverse, et finalement l'égalité demandée.

4. Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. L'image $y = f(x)$ est dans $B_1 \cup B_2$, i.e. dans B_1 ou dans B_2 : x est alors dans $f^{-1}(B_1)$ ou dans $f^{-1}(B_2)$, i.e. dans leur réunion. On a $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$: il est dans l'un des deux ensembles, par exemple dans $f^{-1}(B_1)$: comme $B_1 \subset B_1 \cup B_2$, on a $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Notre x est donc dans $f^{-1}(B_1 \cup B_2)$: on a l'inclusion en sens inverse, et finalement l'égalité demandée.

Exercice 6

Pour $n \geq 2$, soit $\mathcal{H}_n$ la propriété : « il n'y a pas de bijection entre un ensemble quelconque à $n-1$ éléments et un ensemble quelconque à n éléments ».

- Pour $n = 2$, une bijection de $\{x_1,x_2\}$ sur $\{y_1\}$ vérifierait $f(x_1) = f(x_2) = y_1$, ce qui contredit l'injectivité de f. La propriété $\mathcal{H}_2$ est vraie.
- Soit $n \geq 3$. Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathcal{H}_n$ est fausse, et donc qu'il existe un ensemble $E = \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$, un ensemble $F = \{y_1, \cdots ,y_n\}$ et une bijection f de E sur F. Quitte à changer la numérotation, supposons que $f(x_{n-1}) = y_n$. Notons $X = \{x_1, \cdots ,x_{n-2}\}$ et $Y = \{y_1, \cdots ,y_{n-1}\}$. Ils contiennent respectivement $n-2$ et $n-1$ éléments, et la restriction g de f à X réalise une bijection de X sur Y. Mais $\mathcal{H}_{n-1}$ nous dit que cela est impossible. Une telle bijection g ne peut pas exister, et E,F,f ne peuvent pas exister : $\mathcal{H}_n$ est vraie. Notre propriété est héréditaire, et donc vraie pour tout $n \geq 2$.

COURS

2 Polynômes : divisibilité et racines

[MOTS-CLÉS : SUITE FINIE, POLYNÔME, INDÉTERMINÉE, FONCTION POLYNÔME, DEGRÉ, SOMME, PRODUIT, DIVISIBILITÉ, DIVISION EUCLIDIENNE, RACINES, ORDRE DE MULTIPLICITÉ, FORMULE DE TAYLOR, DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES, ANNEAU]

On se place sur un corps K a priori quelconque. Les polynômes sont décrits en quatre fiches. La fiche 3 précisera les choses pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, qui sont les cas les plus courants, la fiche 18 parlera des polynômes premiers entre eux, et la fiche 33 abordera le PGCD et l'algorithme d'Euclide. Seules les fiches 2 et 3 sont nécessaires pour l'algèbre linéaire des fiches 5 à 17.

1 Définition et première notation

- L'objet que nous notons $A(X) = 8X^2 - 7X + 9$ est en réalité la suite $(9,-7,8,0,\cdots,0\cdots)$ où seuls trois coefficients sont non nuls. $B(X) = 34X^5 + X^4 - X^2$ est en réalité la suite $(0,0,-1,0,1,34,0\cdots)$. Plus généralement, voici la définition originelle d'un polynôme à coefficients dans le corps K :

Un polynôme sur K est une suite $(a_0,a_1,a_2,\cdots)$ d'éléments de K dont seulement un **nombre fini** de termes sont différents de 0.

Tous les termes sont donc nuls à partir d'un certain rang.

En appelant $n \geq 0$ l'indice du dernier terme a_n non nul, on dit que le polynôme est de degré n, et le scalaire a_n s'appelle coefficient directeur du polynôme.

Exemple 1 : Dans le premier exemple ci-dessus, le dernier terme non nul est $a_2 = 8$. On a un polynôme de degré 2 de coefficient directeur 8. Dans le second exemple, le dernier terme non nul est $a_5 = 34$, et on a un polynôme de degré 5 et de coefficient directeur égal à 34.

Méthodologie

Attention, les termes sont notés $a_0,a_1,a_2\cdots$ à partir de l'indice 0. Le troisième terme de la suite, par exemple, est en fait a_2.

- La suite entièrement composée de 0 s'appelle polynôme nul. Elle n'a pas de degré suivant la définition précédente, mais on dit que son degré est égal à $-\infty$. C'est quelquefois très pratique.
- Un polynôme dont le coefficient directeur est égal à 1 est dit polynôme unitaire.

J'apprends en ligne
www.lienmini.fr/dmalgebre2

2 Addition des polynômes et produit par un scalaire

La somme de $A = (a_0,a_1,a_2,\cdots)$ et de $B = (b_0,b_1,b_2,\cdots)$ est le polynôme

$$A + B = (a_0 + b_0,a_1 + b_1,a_2 + b_2,\cdots).$$

- On voit facilement que cette suite comporte encore seulement un nombre fini de termes non nuls. Plus précisément :
- Si A est de degré n et B de degré m avec (par exemple) $n > m$, le polynôme $A + B$ s'écrit $(a_0 + b_0,\cdots,a_m + b_m,a_{m+1},\cdots,a_n,0,\cdots)$ avec rien que des 0 à partir du rang $n + 1$. La somme est exactement de degré n.
- Si A et B sont de même degré n, la somme $A + B$ s'écrit $(a_0 + b_0,\cdots,a_n + b_n,0,\cdots)$ avec que des 0 à partir du rang $n + 1$. Mais il est *possible* que $a_n + b_n$ soit aussi égal à 0 : le degré de la somme est donc inférieur ou égal à n.

Méthodologie

Le degré de la somme de deux polynômes est inférieur ou égal au plus grand des deux degrés.

- On vérifie aisément que l'addition confère une structure de groupe additif commutatif à l'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K. L'opposé de $A = (a_0,a_1,a_2,\cdots)$ est $(-a_0, -a_1, -a_2,\cdots)$, que l'on note $-A$.
- Le produit du polynôme $(a_0,a_1,a_2,\cdots)$ par le scalaire $\lambda \in K$ est le polynôme $(\lambda a_0,\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots)$ où chaque coefficient est multiplié par λ.

3 Produit de polynômes

Le produit de $A = (a_0,a_1,a_2,\cdots)$ par $B = (b_0,b_1,b_2,\cdots)$ est le polynôme $C = (c_0,c_1,c_2,\cdots)$ défini par $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$ et plus généralement, pour tout k, par $c_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$.

- Soit n le degré de A et m celui de B. On voit que $c_{n+m} = a_nb_m$ et que $c_k = 0$ pour tout $k > n + m$.

Le degré du produit de deux polynômes est égal à la somme de leurs degrés.

Exemple 2 : Soit $A = (2,-3,0,1,-2,0,\cdots)$ et $B = (7,8,0,0,0,0,-1,0\cdots)$. On obtient $AB = (14, -2, -24,7, -6, -16, -2,3,0, -1,2,0,\cdots)$, qui est de degré $4 + 6 = 10$ et de coefficient directeur 2.

- Si l'un des polynômes est le polynôme nul, le produit est encore le polynôme nul.

- On voit aussi aisément que le produit d'un polynôme quelconque A par le polynôme $(1,0,0,\cdots)$ de degré 0, est encore égal à A. Ce polynôme se note simplement « 1 » et est l'élément neutre pour la multiplication.
- Les propriétés de l'addition et de la multiplication confèrent à l'ensemble $K[X]$ une structure d'anneau commutatif unitaire intègre, d'élément unité 1.

4 Notation définitive d'un polynôme

- Notons $1 = (1,0,0,\cdots)$ avec un unique coefficient égal à 1 en position 0, et $X = (0,1,0,0,\cdots)$ avec un unique coefficient égal à 1 « en position 1 ».
- La définition du produit nous donne immédiatement $X^2 = (0,0,1,0,\cdots)$, $X^3 = (0,0,0,1,0,\cdots)$ et ainsi de suite. Nous pouvons écrire, pour un polynôme A de degré n :
  $(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,0,\cdots) = a_0(1,0,0,\cdots) + a_1(0,1,0,\cdots)$
  $+a_2(0,0,1,0,\cdots)+\cdots+a_n(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n \text{ fois}},1,0,\cdots) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n.$
- On retrouve ainsi la notation classique des polynômes, et toutes les opérations se font comme on a l'habitude de faire, heureusement. Bien sûr, l'indéterminée notée X peut aussi être notée x (ou avec toute autre lettre), ce qui sera fait indifféremment ici.
- Un polynôme est pair quand il ne contient que des puissances paires de X, et impair quand il ne contient que des puissances impaires de X.

5 Fonction polynôme associée à un polynôme

- A tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on peut associer l'application p de K dans K définie par $x \in K \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cette application se comporte comme le polynôme lui-même, et on pourrait les confondre, ce qui se fait souvent même si c'est un abus de langage. Avec des corps « baroques » comme $F_2 = \{0,1\}$ où $1+1=0$, un polynôme non nul peut donner naissance à une fonction polynôme identiquement nulle. Mais ce cas n'est pas envisagé, en principe, en L1L2.
- Pour $P \in K[X]$ et $a \in K$, on notera sans état d'âme $P(a)$ la valeur de la fonction polynôme associée à P au point a.

Point Danger, Attention

Les polynômes sont des objets formels. La relation $(x-a)P(X) = (X-a)Q(X)$ équivaut bien à l'égalité $P(X) = Q(X)$. On n'a pas à se préoccuper de « ce qui se passe en $X = a$ », chose qui ne veut rien dire ici.

6 Divisibilité dans $K[X]$

On dit que $A(X)$ est divisible par $B(X)$ quand il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X)$.

Exemple 3 : $A(X) = X^3 - 1$ est divisible par $B(X) = X^2 + X + 1$ puisque $A(X) = (X-1)B(X)$. Il est donc aussi divisible par $X - 1$. Le trinôme $X^2 - 3X + 2$ est divisible par $X - 1$ et par $X - 2$ puisque $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.

- Dans le cas général où $A(X)$ n'est pas le polynôme nul, son degré est supérieur ou égal à celui du diviseur $B(X)$. Par ailleurs, si $B(X)$ divise $A(X)$, alors $\lambda B(X)$ divise encore $A(X)$, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$.

Exemple 4 : Si l'entier m divise l'entier n, alors $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. En effet $X^{mq} - 1 = \left(X^m\right)^q - 1 = (X^m - 1)\left(\sum_{h=0}^{q-1}(X^m)^h\right)$ d'après l'identité remarquable $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + ba^{p-2} + \cdots + b^{p-1})$.

Un polynôme $P \in K[X]$ est factorisable (ou réductible) quand il existe deux polynôme A et B dans K[X], tous deux de degré supérieur ou égal à 1 tels que $P = A \times B$. Quand cela est impossible, on dit que P est irréductible.

- Un polynôme est irréductible quand il est divisible uniquement par lui-même et les constantes.
- Un polynôme quelconque est soit irréductible, soit un produit de polynômes irréductibles.

Exemple 5 : Dans $\mathbb{R}$[x], $P = x^3 - 1$ est factorisable, puisque $P = (x-1)(x^2+x+1)$. Mais $x^2 + x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}$[x]. Par contre, il est factorisable dans $\mathbb{C}$[x], puisque $x^2 + x + 1 = (x - e^{i2\pi/3})(x - e^{-2i\pi/3})$.

- L'équivalent de « polynôme irréductible » dans les entiers est « nombre premier ».

Méthodologie

La divisibilité dans les polynômes présente des propriétés identiques à celle de la divisibilité dans les entiers. Les anneaux $K[X]$ et $\mathbb{Z}$ sont très similaires.

7 Division euclidienne

- $B = b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0$ désigne un polynôme non nul dans tout le paragraphe. La division euclidienne des polynômes rappelle celle des entiers.

Théorème 1. Soit B un polynôme non nul. Tout polynôme A s'écrit de façon unique $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ où R est **soit** le polynôme nul, **soit** de degré strictement inférieur au degré de B.

Démonstration en ligne

Cette démonstration donne en pratique l'algorithme de calcul de Q et de R.

Point **Terminologie**

Q est le quotient de la division euclidienne de A par B et R en est le reste. A s'appelle le dividende et B le diviseur.

Exemple 6 : L'égalité $6x^4+14x^3-7x^2-12x+31 = (3x+7)(2x^3-4x+5)+5x^2+x-4$ est la division euclidienne de $A = 6x^4+14x^3-7x^2-12x+31$ par $B = 2x^3-4x+5$ puisque $5x^2+x-4$ est de degré 2, strictement plus petit que le degré 3 du diviseur B.

- L'exemple suivant détaille complètement le processus de division, en illustrant la démonstration donnée en ligne. La lecture de cette démonstration est impérative pour bien comprendre les étapes de la division.

Exemple 7 : Division euclidienne de $A(x) = 6x^4+x^3+5x-5$ par $B(x) = 2x^2+x-1$.

$$
\begin{array}{ccccc|l}
6x^4 & +x^3 & & +5x & -5 & \mathbf{2x^2+x-1} \\
\hline
 & -2x^3 & +3x^2 & +5x & -5 & 3x^2-x+2 \\
 & & +4x^2 & +4x & -5 & \\
 & & & \mathbf{+2x} & \mathbf{-3} &
\end{array}
$$

– Pour obtenir $6x^4$, on doit multiplier le terme directeur $2x^2$ de $B(x)$ par $3x^2$. On effectue donc la soustraction $A_1(x) = A(x)-3x^2B(x) = -2x^3+3x^2+5x-5$, que l'on reporte à droite : A_1 est le nouveau dividende. Dans le quotient, à droite, on pose $3x^2$.

– Pour obtenir $-2x^3$, on doit multiplier $2x^2$ par $-x$. On effectue la soustraction $A_2(x) = A_1(x) - (-x)B(x) = 4x^2 + 4x - 5$, que l'on reporte à droite : A_2 est le nouveau dividende. Dans le quotient à droite, on ajoute $-x$.

– Pour obtenir $4x^2$, on doit multiplier $2x^2$ par 2. On effectue la soustraction $A_3(x) = A_2(x) - 2B(x) = 2x-3$, que l'on reporte à droite : A_3 est le nouveau dividende. Dans le quotient à droite, on ajoute $+2$.

– Comme le degré du dividende A_3 est strictement inférieur à celui du diviseur B, on s'arrête ici. Ce dernier dividende est le reste de la division euclidienne. Le quotient se lit à droite, en dessous du diviseur : le quotient est $Q(x) = 3x^2-x+2$ et le reste est $R(x) = 2x-3$.

Méthodologie

À chaque étape, pour enlever le terme de plus haut degré a_pX^p du dividende, on soustrait $\dfrac{a_p}{b_m}X^{p-m}B(X)$ à ce dividende, et on stocke $\dfrac{a_p}{b_m}X^{p-m}$ dans le quotient, en bas à droite.

Exemple 8 : On a $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$. Comme $X^3 - 1$ est divisible par $B = X^2 + X + 1$, le reste de la division euclidienne est nul.

- La division euclidienne par $X - a$ est un cas particulier fondamental :

Théorème 2. Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$, où a est un scalaire, est le polynôme constant $P(a)$.

En effet, comme le diviseur est du premier degré, le reste est de degré 0 (ou est le polynôme nul), à savoir une constante C. En faisant $X = a$ dans l'égalité $P(X) = Q(X)(X-a) + C$, il vient $P(a) = C$.

8 Racine d'un polynôme

Un scalaire $a \in K$ vérifiant $P(a) = 0$ s'appelle racine du polynôme P.

Exemple 9 : Soit $P(X) = X^2 - 3X + 2$ sur K. Les scalaires 1 et 2 sont racines de P. Soit $P(X) = X^4 + 3X^2 + 7$ sur $\mathbb{R}$: il n'admet aucune racine. Soit $P(X) = X^2 + 1$ sur $K = \mathbb{C}$: il admet deux racines $\pm i$. Soit $P(X) = X^3 - 1$: sur $\mathbb{R}$, il admet une unique racine égale à 1, mais il en admet 3 sur $\mathbb{C}$.

Exemple 10 : Soit $P(X) = X(X-1)/2 - X(X-2) + (X-1)(X-2)/2$, qui est de degré inférieur ou égal à 2. On a $P(0) = P(1) = P(2) = 1$. Le trinôme $P(X) - 1$ admet donc au moins trois racines, ce qui implique que c'est le polynôme nul. P est donc le polynôme constant égal à 1.

- La notion de racine est liée à la divisibilité :

Théorème 3. Le scalaire a est racine de $P(X)$ si et seulement si $P(X)$ est divisible par $X - a$.

C'est une conséquence de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$, puisque le reste de cette division est la constante $P(a)$.

- On en déduit un résultat important :

Théorème 4. Si $a_1, \cdots, a_k$ sont des racines **distinctes** de P, alors P est divisible par $(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_k)$.

En effet, on peut écrire $P(X) = (X-a_1)P_1(X)$. Comme $a_2 \neq a_1$, on a $0 = (a_2 - a_1)P_1(a_2)$, et donc $P_1(a_2) = 0$, ce qui permet d'écrire $P_1(X) = (X-a_2)P_2(X)$ et $P(X) = (X-a_1)(X-a_2)P_2(X)$, et ainsi de suite.

- On en déduit une astuce utile :

Méthodologie

Pour montrer qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n est nul, montrer qu'il admet au moins $n+1$ racines distinctes.

- Terminons par un résultat qui sera repris dans la fiche 3 : tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.

9 Polynôme dérivé, formule de Taylor

- Le polynôme dérivé de $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$, formule « habituelle » de l'analyse. Le degré diminue d'une unité. Les polynômes dérivés successifs P'',$P^{(3)}, \cdots$ sont définis de façon analogue.
- La formule de Taylor vient de l'analyse mais aussi de la notion de base dans un espace vectoriel, qui sera vue plus loin.

Théorème 5. Soit a un scalaire quelconque. Tout polynôme P de degré n s'écrit

$$P(X) = P(a) + \frac{X-a}{1!}P'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!}P''(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$$

Démonstration en ligne

10 Racines multiples

- $a = 1$ est racine de $P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+5X+7)$ et de $Q(X) = (X-1)^2(X^2+1)$, car tous deux sont divisibles par $X-1$. Mais le second polynôme est divisible par $(X-1)^2$, et on dira que $a = 1$ est racine double. Plus généralement :

Le scalaire a est racine d'ordre de multiplicité m de $P(X)$ lorsque P est divisible par $(X-a)^m$ mais n'est pas divisible par $(X-a)^{m+1}$.

- Pour $m = 1$, on parle de racine simple ; pour $m = 2$ de racine double ; pour $m = 3$ de racine triple.

Exemple 11 : Dans $\mathbb{R}$[X], $P(X) = (X+2)^3(2X+5)(X^2+1)^2$ admet $a = -2$ comme racine triple et $a = -5/2$ comme racine simple. Dans $\mathbb{C}$[X], il admet aussi $\pm i$ comme racines doubles.

- La formule de Taylor donne une condition nécessaire et suffisante très pratique :

Théorème 6. Le scalaire a est racine d'ordre m de $P(X)$ si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \cdots P^{(m-1)}(a) = 0, \quad \text{mais} \quad P^m(a) \neq 0$$

Exemple 12 : Soit $P(X) = 2x^6 - 13x^5 + 33x^4 - 55x^3 + 98x^2 - 132x + 72$. On vérifie que $P(2) = P'(2) = P''(2) = 0$ et $P^{(3)}(2) \neq 0$. Le scalaire 2 est racine triple de P.

Méthodologie

- Cette condition est pratique quand on connaît a, car elle évite de faire des divisions à l'aveuglette.
- La condition $P(a) = P'(a) = \cdots P^{(m-1)}(a) = 0$ implique que a est racine au moins d'ordre m, on ne peut pas en dire plus.

◆ L'appellation « racine multiple » signifie que a est au moins racine double, mais que l'on n'en sait a priori pas plus.

Méthodologie

a est racine multiple de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

◆ Voici une définition qui sera utile en algèbre linéaire :

Un polynôme $P \in K[X]$ de degré n est dit scindé lorsqu'il admet exactement n racines distinctes ou non dans K.

◆ Cette définition sous-entend que les racines sont dans K. Par exemple, $(X^2-1)^2(X^2+1) = (X-1)^2(X+1)^2(X-i)(X+i)$ est scindé si on le considère comme élément de $\mathbb{C}$[X] mais n'est pas scindé si on le considère comme élément de $\mathbb{R}$[X].

11 Nombre maximal de racines d'un polynôme

Théorème 7. Un polynôme de degré n sur K admet au maximum n racines, distinctes ou non dans K.

Démonstration en ligne

◆ Une racine double doit être comptée deux fois, une racine triple trois fois et ainsi de suite.

Exemple 13 : $P(x) = (x^2+1)(x^2-3)$, de degré 4, admet 4 racines $\pm i, \pm\sqrt{3}$ si on le considère comme élément de $\mathbb{C}$[x], en admet seulement 2 si on le considère comme élément de $\mathbb{R}$[x], et aucune comme élément de $\mathbb{Q}$[x].

12 Division suivant les puissances croissantes

◆ Cette division n'est pas difficile, mais elle est fondamentalement différente de la division euclidienne, et donc présentée loin d'elle. Elle sert surtout en analyse.

Théorème 8. Soient $A = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$ et $B = b_0 + b_1x + \cdots + b_qx^q$ deux polynômes avec $b_0 \neq 0$ et n un entier donné. Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que $A(x) = Q(x)B(x) + x^{n+1}R(x)$ et degré$(Q) \leq n$.

Exemple 14 : $A = 2 - x + 5x^2 + 4x^3$, $B = 1 - x + 3x^2$ et $n = 4$.

$$\begin{array}{r|l} 2 - x + 5x^2 + 4x^3 & \mathbf{1 - x + 3x^2} \\ \hline x - x^2 + 4x^3 & 2 + x + x^3 + x^4 \\ x^3 & \\ x^4 - 3x^5 & \\ \mathbf{-2x^5 - 3x^6} & \end{array}$$

- Pour enlever le 2 de A, on multiplie B par 2, et on soustrait à A : $A_1 = A - 2B = x - x^2 + 4x^3$ ne possède plus de constante. On pose 2 en début du quotient, et A_1 est le nouveau dividende.
- Pour enlever le x de A_1, on multiplie B par x et on soustrait à A_1 : $A_2 = A_1 - xB = x^3$ ne possède plus de terme en x. On ajoute x dans le quotient, et A_2 est le nouveau dividende.
- Pour enlever x^3 de A_2, on multiplie B par x^3, et on soustrait à A_2 : $A_3 = A_2 - x^3B = x^4 - 3x^5$ ne contient plus de x^3. On ajoute x^3 au quotient, et A_3 est le nouveau dividende.
- Pour enlever x^4 de A_3, on multiplie B par x^4, et on soustrait à A_3 : $A_4 = A_3 - x^3B = -2x^5 - 3x^6$ ne contient plus de x^4. On ajoute x^4 au quotient, et A_4 est le nouveau dividende.
- On s'arrête là, puisque le quotient $\boldsymbol{Q(x) = 2 + x + x^3 + x^4}$ a atteint le degré maximal 4 autorisé ; on voit bien que x^{4+1} est en facteur dans A_4, qui va être le reste $x^{4+1}R(x)$ de la division. On a finalement $A = (2 + x + x^3 + x^4)B + x^5(-2 - 3x)$.

Exemple 15 : L'identité $1 = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) + x^{n+1} \times 1$ traduit la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n du polynôme constant 1 par $1 - x$, le quotient étant $Q(x) = 1 + x + \cdots + x^n$ et avec $R(x) = 1$.

Méthodologie

- Contrairement à la division euclidienne, la division suivant les puissances croissantes est susceptible de faire apparaître, dans le reste, des puissances plus grandes que le degré du dividende et/ou du diviseur.
- Il faut impérativement écrire tous les polynômes dans l'ordre des puissances croissantes, l'opposé de l'ordre classique.

◆ L'exemple « algorithmique » 14 est une « preuve constructive » de l'existence de cette division, aucune démonstration théorique (qui serait très semblable à celle de la division euclidienne) n'est donnée dans l'ouvrage. L'unicité est plus intéressante : prenons $A = BQ_1 + X^{n+1}R_1 = BQ_2 + X^{n+1}R_2$, où les degrés de Q_1,Q_2 sont inférieurs ou égaux à n. Il vient $B(Q_2 - Q_1) = X^{n+1}(R_1 - R_2)$. Si $R_1 \neq R_2$, à savoir si $Q_1 \neq Q_2$, le degré de la plus **faible** puissance de X à droite est au moins $n + 1$. A gauche, sachant que $b_0 \neq 0$, la **plus faible** puissance de X vient de $b_0(Q_2 - Q_1)$, et est donc **au maximum** de degré n, puisque $Q_2 - Q_1$ est au maximum de degré n par hypothèse sur le degré du quotient. Ceci est impossible, on a $R_1 = R_2$ et donc $Q_1 = Q_2$ et unicité de la division.

Je m'entraîne en ligne
Exercices supplémentaires 4,5,6
www.lienmini.fr/exalgebre2

Exercice 1

On cherche tous les polynômes non nuls de K[X] vérifiant la relation

$$(X+4)P(X) = XP(X+1).$$

1. Trouver quatre racines entières négatives de P, et en déduire la forme de P.

2. Montrer qu'un polynôme Q tel que $Q(X+1) = Q(X)$ est constant : on pourra regarder le polynôme $Z(X) = Q(X) - Q(0)$.

3. En déduire P.

Exercice 2

Soient $A = 2X^5 - X^4 + 6X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ et $B = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$.

1. Calculer le reste R de la division euclidienne de A par B, puis le reste R_1 de la division euclidienne de B par R, puis le reste de la division euclidienne de R par R_1.

2. Montrer, sans aucune nouvelle division, que R_1 divise B et A.

3. Effectuer les divisions de A et B par $P = R_1/3$. Trouver, à l'œil et sans calcul, une factorisation de A dans $\mathbb{R}$[X].

Exercice 3

1. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme non constant divisant à la fois $(x-1)^2$ et x^3+1.

2. Soit $U_0 = 3x^2 + x - 1$ et $V_0 = 5 - 3x$: calculer

$$(x-1)^2 U_0 + (x^3+1)V_0$$

3. En déduire un polynôme P vérifiant les deux conditions

(a) $x = 1$ est racine multiple de P

(b) le reste de la division euclidienne de P par x^3+1 est égal à 4.

2 CORRIGÉS

Exercice 1

1. En prenant $x = -4$, on trouve $P(-3) = 0$. Avec $x = -3$, on trouve $P(-2) = 0$. Avec $x = -2$, on a $P(-1) = 0$. Avec $x = -1$, on trouve $P(0) = 0$. Mais en faisant $x = 0$, on ne peut plus rien déduire. Le polynôme P est de la forme $P(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)H(X)$, où $H \in K[X]$.

2. Une récurrence immédiate donne $Q(1) = Q(0)$, puis $Q(2) = Q(1) = 0$ et $Q(n) = Q(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme Z admet donc une infinité de racines : c'est le polynôme nul. On a donc $Q(X) = Q(0)$ polynôme constant.

3. En reportant dans la relation de départ, on obtient

$$X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)H(X) = XH(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)$$

à savoir $H(X+1) = H(X)$. Cela signifie que H est un polynôme constant. On a donc $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$. Il est facile de vérifier que tous ces polynômes conviennent.

Exercice 2

1. Les calculs donnent

- $A = (2X+1)B + X^3 - 2X^2 + 2X - 4$, soit $R = X^3 - 2X^2 + 2X - 4$.
- $B = (X+1)R + 3X^2 + 6$, soit $R_1 = 3X^2 + 6$.

La division suivante montre que R est divisible par R_1.

2. Comme R_1 divise R, la relation $B = (X+1)R + R_1$ montre que R_1 divise B. Comme $A = (2X+1)B + R$, et que R_1 divise R et B, il divise aussi A.

3. Les divisions donnent $A = (X^2+2)(2X^3 - X^2 + 2X - 1)$ et $B = (X^2+2)(X^2 - X + 1)$. On peut clairement mettre $2X - 1$ en facteur dans A : $A = (X^2+2)(2X-1)(X^2+1)$. Tous les trinômes intervenant dans les écritures de A et B ont un discriminant négatif, et on ne peut pas factoriser plus dans les réels.

Exercice 3

1. Les seuls candidats possibles comme diviseur commun à $(x-1)^2$ et x^3+1 sont $x-1$ et $(x-1)^2$. Effectuons la division euclidienne de x^3+1 par $x-1$: il vient $x^3+1 = (x^2+x+1)(x-1)+2$. Comme le reste n'est pas nul, $x-1$ ne divise pas x^3+1, et a fortiori $(x-1)^2$ non plus. Il n'y a aucun polynôme de degré supérieur ou égal à 1 divisant nos deux polynômes.

2. On développe et on regroupe, on obtient 4.

3. Dire que $x = 1$ est racine multiple de P signifie que P est divisible (au moins) par $(x-1)^2$. On peut donc écrire simultanément

$$P = (x-1)^2 \times H = 4 + (x^3+1) \times K$$

ce qui implique la relation $(x-1)^2 \times H - (x^3+1) \times K = 4$. On peut prendre $H = U_0$ et $K = -V_0$. On a $P = (x-1)^2(3x^2+x-1)$. On a une racine double $x = 1$, mais pas une racine triple, puisque $3x^2 + x - 1$ ne s'annule pas en $x = 1$.

COURS 3
Polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[MOTS-CLÉS : D'ALEMBERT, FACTORISATION, IRRÉDUCTIBILITÉ, RACINES DE L'UNITÉ, RACINE RÉELLE, RACINES CONJUGUÉES, SOMME ET PRODUIT DES RACINES]

Cette seconde fiche consacrée aux polynômes donne les résultats spécifiques aux polynômes à coefficients réels ou complexes.

1 Théorème de d'Alembert

- Voici un gros théorème vital :

Théorème 1. Un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes admet exactement n racines distinctes ou non dans $\mathbb{C}$.

La preuve est donnée en ligne, *mais elle doit être sautée en première lecture*. Elle utilise la racine $n$ème d'un complexe et les théorèmes d'analyse de niveau L2.

Démonstration en ligne

- Ce théorème se précise de la façon suivante pour les polynômes à coefficients réels :

– Un polynôme à coefficients réels admet **au maximum** n racines réelles, distinctes ou non.
– Les racines **complexes** d'un polynôme à coefficients **réels** sont **deux à deux conjuguées** : si $a + ib$ est racine de P, alors $a - ib$ l'est aussi.

Exemple 1 : Les racines dans $\mathbb{C}$ de $P(X) = X^3 - 1$ sont $z_1 = 1, z_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ et $z_3 = \overline{z_2} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$.

- Le théorème de d'Alembert s'énonce aussi de la façon suivante, en utilisant le terme « scindé » défini dans la fiche précédente :

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$, et s'écrit donc comme produit de polynômes du premier degré.

2 Polynôme réel de degré impair

- A priori, un polynôme à coefficients réels peut très bien n'admettre aucune racine dans $\mathbb{R}$, comme par exemple $x^2 + 1$. Mais il y a un cas particulier très important :

Tout polynôme à coefficients réels et de **degré impair** admet au moins une racine réelle.

J'apprends en ligne
www.lienmini.fr/dmalgebre3

C'est une simple application du théorème des valeurs intermédiaires, puisque la fonction polynôme associée est continue et varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Exemple 2 : $P(x) = x^7 - 45x^4 + 5x^3 - x^2 + 3$ admet au moins une racine réelle.

3 Racines de l'unité dans $\mathbb{C}$

- Pour $n \geq 1$, les racines n-ème de l'unité sont les racines du polynôme $X^n - 1$. Il y en a exactement n dans $\mathbb{C}$, les $z_k = e^{i2k\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Elles sont deux à deux conjuguées. Pour n impair, la seule racine réelle est $z_0 = 1$; pour $n = 2m$ pair, il y a $z_0 = 1$ et $z_m = -1$.
- Pour $n = 3$, on a $z_0 = 1$,$j = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{i2\pi/3}$ et $j^2 = \overline{j} = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = e^{-2i\pi/3}$.
- Dans le plan, les points d'affixes z_k sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, dont le réel 1 est un sommet. Son centre est l'origine O, ce qui implique que la somme des racines n-ème de l'unité est nulle.
- Si m est un diviseur de n, toute racine m-ème de l'unité est aussi racine n-ème de l'unité. Cela correspond au fait que $X^n - 1$ est divisible par $X^m - 1$.

4 Polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, factorisation

Dans $\mathbb{C}$[X], les seuls polynômes irréductibles sont les $ax + b$.

C'est une simple conséquence du théorème de d'Alembert.

- Dans les entiers, un nombre non premier est un produit de nombres premiers. On a la même chose avec les polynômes : soit un polynôme est irréductible, soit il s'écrit comme produit de polynômes irréductibles.
- Dans $\mathbb{C}$[X], la factorisation est une autre formulation de d'Alembert :

Un polynôme à coefficients réels ou complexes s'écrit dans $\mathbb{C}$[X] comme produit de polynômes du premier degré à coefficients réels ou complexes.

On a $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{\alpha_i}$ où les $a_1, \cdots, a_k$ sont les racines complexes ou réelles distinctes de P, et où α_i est l'ordre de multiplicité de a_i, et λ une constante. On a évidemment $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$, le degré de P.

- Dans $\mathbb{R}$[X], la factorisation est :

Un polynôme à coefficients réels s'écrit dans $\mathbb{R}$[X] comme produit de polynômes du premier degré et de polynômes du second degré à discriminant négatif, tous les coefficients étant des réels.

Dans la factorisation complexe ci-dessus, on regroupe les racines complexes conjuguées : le produit $(X-a)(X-\overline{a}) = X^2+pX+q$ est un trinôme à coefficients réels et discriminant négatif. On a finalement

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{\alpha_i} \times \prod_{j=1}^{m} (x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}$$

où les trinômes sont à discriminant négatif. La somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + 2\beta_1 + \cdots + 2\beta_m$ est égale au degré de $P(x)$. Il se peut que cette décomposition ne contienne aucun trinôme ou bien aucun polynôme du premier degré.

Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}$[X], la décomposition de

$$P(x) = 2x^{10} + 6x^8 - 20x^6 - x^9 + 30x^5 - 68x^4 + 72x^3 - 30x^2 + 27x - 18$$

en produit de polynômes irréductibles est $(x-1)^3(x+2)(2x^2+x+1)(x^2+3)^2$. Dans les complexes, on a

$$P(x) = (x-1)^3(x+2)(x+1/4+i\sqrt{7}/4)(x+1/4-i\sqrt{7}/4)(x-i\sqrt{3})^2(x+i\sqrt{3})^2.$$

Exemple 4 : Dans $\mathbb{R}$[X], les seules possibilités pour un polynôme de degré 5 sont : (i) cinq racines réelles, (ii) trois racines réelles et deux racines complexes conjuguées, (iii) une racine réelle et quatre racines complexes 2 à 2 conjuguées.

Méthodologie

Cette écriture est unique à une constante multiplicative près. Par exemple, on peut utiliser $2X - 1$ ou $2(X - 1/2)$.

- Une autre formulation de cette factorisation dans les réels est :

Théorème 2. Dans $\mathbb{R}$[X], les seuls polynômes irréductibles sont les $ax+b$ et les polynômes du second degré à discriminant négatif.

5 Somme et produit des racines d'un polynôme

- Soit P un polynôme à coefficients réels ou complexes. Même sans connaître les racines de P, on en connaît la somme et le produit :

La somme des n racines réelles et/ou complexes de

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

est égale à $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. Leur produit est égal à $(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

En effet, en appelant $x_1, \cdots, x_n$ les racines (distinctes ou non) de P, l'égalité des écritures $a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$ et $a_n(X-x_1)\cdots(X-x_n)$ donne le résultat.

Exemple 5 : On retrouve la somme $-b/a$ et le produit c/a des racines de $aX^2 + bX + c$.

Exemple 6 : Les racines $n-$ème de l'unité sont les racines de $X^n - 1$. Leur somme est nulle, et leur produit est égal à $(-1)^{n-1}$.

Méthodologie

- Pour un polynôme à coefficients réels, bien comprendre qu'il s'agit de la somme et du produit de toutes les racines réelles et complexes.
- Dans la somme et le produit, une racine multiple intervient autant de fois que sa multiplicité.

Exemple 7.a : Les racines de

$$8x^9 - 12x^8 + 6x^7 - x^6 - 24x^5 + 36x^4 - 34x^3 + 27x^2 - 12x + 2$$

sont $\pm\sqrt{2}$ (simples), $\pm i$ (doubles) et $1/2$ (triple).

Exemple 7.b : La somme des racines est $-\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 \times i - 2 \times i + 3 \times 1/2 = 3/2$, ce qui est bien $-(-12/8)$. Le produit est $(-\sqrt{2})(\sqrt{2})(i^2)((-i)^2)\Big(1/2\Big)^3 = -1/4$, ce qui est bien $(-1)^9 2/8$.

Je m'entraîne en ligne
Exercices supplémentaires 2,3,5
www.lienmini.fr/exalgebre3

Exercice 1

Soit $P(X) = 1 + (X^2 - X + 1)^2$, que l'on considérera comme élément de $\mathbb{C}$[X] ou de $\mathbb{R}$[X] suivant le moment.

1. En utilisant l'identité remarquable $a^2 + b^2 = \cdots$ dans les complexes, écrire P comme produit de deux trinômes à coefficients complexes.

On rappelle que les racines du trinôme $az^2 + bz + c$ à coefficients complexes sont données par les formules classiques $z = \dfrac{-b \pm \omega}{2a}$ où ω est un complexe vérifiant $\omega^2 = b^2 - 4ac$.

2. Montrer que $\omega = a + ib$ vérifie $\omega^2 = -3 - 4i$ si et seulement si les réels a,b vérifient

$$a^2 - b^2 = -3, ab = -2, a^2 + b^2 = 5$$

et donner une valeur de ω. En déduire une valeur de ω' vérifiant $\omega'^2 = -3 + 4i$.

3. En déduire les racines complexes de P, puis la factorisation de P dans $\mathbb{R}$[X].

Exercice 4

Soit $n \geq 2$. Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ de

$$P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$$

Exercice 1

1. On a $a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a - ib)(a + ib)$. On en déduit

$$P = (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 + i)$$

2. Le développement de $(a + ib)^2$ donne les deux premières relations. On a ensuite $|\omega^2| = |\omega|^2 = |-3-4i|$, soit $a^2+b^2 = 5$. La résolution donne $a^2 = 1$ et $b^2 = 4$, soit $a = \pm 1, b = \pm 2$. La condition $ab = -2$ donne par exemple $a = 1, b = -2$ et $\omega = 1 - 2i$. Ensuite, on change i en $-i$ pour avoir $\omega' = 1 + 2i$.

3. Le discriminant de $X^2 - X + 1 + i$ vaut $-3 - 4i$. Les racines de l'équation du second degré $X^2 - X + 1 + i = 0$ sont donc, avec les formules classiques et $\omega = 1 - 2i$, $x_1 = [1 + (1 - 2i)]/2 = 1 - i$, $x_2 = [1 - (1 - 2i)]/2 = -i$. Celles de $X^2 - X + 1 - i$ sont donc $1 + i$ et i. Dans $\mathbb{C}$[X], on a donc

$$P(X) = (X - i)(X + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$$

En effectuant les produits conjugués on obtient dans $\mathbb{R}$[X] :

$$P = (X^2 + 1)((X - 1)^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

Exercice 4

Comme $x = 1$ n'est pas racine du polynôme, on divise par $(x - 1)^n$, et on se ramène à l'équation $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^n = 1$, à savoir $\dfrac{x+1}{x-1} = e^{i2k\pi/n}$. La valeur $k = 0$ est impossible, puisque $(x + 1)/(x - 1)$ ne peut pas être égal à 1 : il reste les $n - 1$ valeurs pour $1 \leq k \leq n - 1$, ce qui est cohérent avec le fait que P est de degré $n - 1$ seulement. Il vient $x_k = \dfrac{e^{i2k\pi/n} + 1}{e^{i2k\pi/n} - 1}$. En mettant $e^{ik\pi/n}$ en facteur en haut et en bas, et en simplifiant, puis en utilisant les formules d'Euler, il vient $x_k = -i\dfrac{\cos k\pi/n}{\sin k\pi/n}$, pour $1 \leq k \leq n - 1$. Pour n pair, 0 est l'unique racine réelle. Pour n impair, il n'y a pas de racine réelle.

COURS

4 Fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[MOTS-CLÉS : PARTIE ENTIÈRE, PÔLES, ÉLÉMENTS SIMPLES, DÉCOMPOSITION, ASTUCES, RÉEL, COMPLEXE, CORPS]

La notion de fraction rationnelle peut se définir sur un corps quelconque. L'objectif majeur étant ici la décomposition en éléments simples et ses techniques élémentaires, on se placera systématiquement sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, où le théorème de d'Alembert s'applique. L'aspect théorique et les techniques décrites ici sont valables uniquement sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition et premières propriétés

Une fraction rationnelle sur K est un objet formel que l'on écrit sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes à coefficients dans K, le dénominateur Q étant différent du polynôme nul. Leur ensemble se note K(X).

- Les polynômes sont des fractions rationnelles particulières, où Q est un polynôme constant non nul, que l'on prend égal à 1.
- Deux fractions rationnelles A/B et C/D sont égales lorsque $A \times D = B \times C$. On peut donc toujours simplifier le numérateur et le numérateur par un diviseur commun.

Exemple 1 : $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Méthodologie

Une fraction rationnelle est un objet formel. On ne s'occupe pas, dans la définition, de savoir si le dénominateur possède ou non des racines dans K.

- La somme et le produit de deux fractions rationnelles sont définis par les formules

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x)+C(x)B(x)}{B(x)D(x)} \quad \text{et} \quad \frac{A(x)}{B(x)} \times \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)C(x)}{B(x)D(x)}$$

- On note encore 0 la fraction rationnelle de numérateur nul, et 1 celle dont le numérateur et le dénominateur sont le polynôme constant égal à 1. L'opposée (pour l'addition) de la fraction A/B est $-A/B$ et l'inverse (pour le produit) de la fraction non nulle A/B est B/A. On a donc, et sans démonstration :

Théorème 1. L'addition et le produit confèrent à K(X) une structure de corps.

Méthodologie

Les calculs dans K(X) se font comme les calculs dans $\mathbb{Q}$, avec les mêmes règles opératoires liant numérateurs et dénominateurs.

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}\frac{3x-7}{x^2+x+1}+\frac{x^3+x-5}{x^2-1}&=\frac{(3x-7)(x^2-1)+(x^3+x-5)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{x^5+x^4+5x^3-11x^2-7x+2}{(x^2+x+1)(x^2-1)}\end{aligned}$$

Exemple 3 :

$$\begin{aligned}\frac{3x-7}{x^2+x+1}\times\frac{x^3+x-5}{x^2-1}&=\frac{(3x-7)\times(x^3+x-5)}{(x^2-1)(x^2+x+1)}\\&=\frac{3x^4-7x^3+3x^2-22x+35}{(x^2+x+1)(x^2-1)}\end{aligned}$$

Méthodologie

Souvent, on développe au numérateur, mais on laisse le dénominateur sous forme factorisée.

- Les racines du dénominateur s'appellent « pôles » de la fraction. Une fraction à coefficients réels peut donc admettre des pôles complexes.

Exemple 4 : Les fractions des exemples 2 et 3 admettent ± 1 comme pôles réels et $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ comme pôles complexes.

2 Partie entière d'une fraction rationnelle

- Quand le degré du numérateur $A(x)$ de la fraction rationnelle $A(x)/B(x)$ est supérieur ou égal au degré du dénominateur $B(x)$, on a souvent intérêt à effectuer la division euclidienne $A = BQ + R$, où le degré de R est strictement plus petit que celui de B. On peut alors écrire
$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{B(x)Q(x)+R(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$$
et introduire la fraction rationnelle « plus simple » $R(x)/B(x)$ où le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. Le polynôme Q s'appelle partie entière de la fraction initiale.

Exemple 5 : $F(x)=\dfrac{4x^5-x^4+x^2-8}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$. Une division euclidienne donne

$$4x^5-x^4+x^2-8=(4x+11)\times(x-1)(x-2)(x^2+1)+21x^3-20x^2+25x-30$$

On a donc $F(x)=4x+11+\dfrac{21x^3-20x^2+25x-30}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$.

Point irréductible de la fiche

La suite de la fiche sous-entend que toutes les simplifications ont été faites entre le numérateur et le dénominateur : on a une écriture irréductible de la fraction.

3 Décomposition en éléments simples dans les réels : premier aperçu

- Regardons quelques exemples :

Exemple 6 : La fraction de l'exemple 3 est égale à $3 + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{35}{x+1} + \dfrac{-23x+1}{x^2+x+1}$. Cette écriture est plus sympathique, car elle fait apparaître une somme de fractions relativement « simples ».

Exemple 7 : On a $\dfrac{-13-5x-x^2-3x^3+3x^4+2x^5+x^6}{(x-1)^2(x-2)(x^2+1)^2}$
$= \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{7}{x-1} + \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{2x-1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{3x-1}{x^2+1}$ écriture qui est aussi plus agréable.

- On voit apparaître des « petites fractions » qui sont de deux formes :
  - La forme $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, où A et a sont des constantes, et $k \geq 1$ un entier. Le nombre a est un pôle réel de la fraction initiale. Une telle petite fraction s'appelle élément simple de première espèce.
  - La forme $\dfrac{ux+v}{(x^2+px+q)^k}$ où u,v,p,q sont des constantes réelles, et où x^2+px+q est à **discriminant négatif**, et intervient dans la factorisation du dénominateur de la fraction initiale donnée. Une telle petite fraction est appelée élément simple de deuxième espèce.

Exemple 8 : $N(x) = -11 - 12x + 6x^2 - 7x^3 + 18x^5 - 18x^6 + 16x^7 + 3x^9 - 11x^8$ et $D(x) = (x-1)^2(x-2)(x^2+1)^2$. On a
$\dfrac{N(x)}{D(x)} = 3x^2 + x - 1 + \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{7}{x-1} + \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{2x-1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{3x-1}{x^2+1}$.

- Dans les exemples 6 et 8, on voit aussi apparaître un polynôme en tête de l'expression de droite : il correspond au fait que le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, et c'est la partie entière de la fraction rationnelle. Il n'existe pas lorsque le degré du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur.

4 Décomposition en éléments simples dans les réels : forme théorique

- Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ dont on connaît la factorisation du dénominateur dans les réels sous la forme

$$D(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i} \times \prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j}$$

où les trinômes sont à discriminant négatif. La somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + 2\beta_1 + \cdots + 2\beta_m$ est égale au degré de $D(x)$. Il se peut que cette décomposition ne contienne aucun trinôme ou bien aucun polynôme du premier degré.

- Dans le cas où le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, on voit apparaître une partie entière qui est le quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Méthodologie

Toujours commencer par calculer la partie entière de la fraction, et effectuer la décomposition en éléments simples sur ce qui reste de la fraction, avec maintenant le degré du numérateur strictement inférieur à celui du dénominateur.

- **Chaque** $(x - a_i)^{\alpha_i}$ donne naissance à une somme
$$\frac{A_1}{(x-a_i)^{\alpha_i}} + \frac{A_2}{(x-a_i)^{\alpha_i - 1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i}}{x - a_i}$$
où les A_j sont des constantes réelles, avec obligatoirement $A_1 \neq 0$. Parmi les suivants, certains peuvent être nuls. On a donc ici uniquement des éléments simples de première espèce.
- **Chaque** $(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}$ donne naissance à une somme
$$\frac{u_1 x + v_1}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}} + \frac{u_2 x + v_2}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j - 1}} + \cdots + \frac{u_{\beta_j} x + v_{\beta_j}}{x^2 + p_j x + q_j}$$
Les numérateurs sont des polynôme de degré ≤ 1, et $u_1 x + v_1$ n'est pas le polynôme nul. Dans les suivants, il peut y avoir des polynômes nuls. Tous les u_k, v_k sont des constantes réelles. On a ici uniquement des éléments simples de deuxième espèce.

Théorème 2. Une fraction $F \in \mathbb{R}(X)$ est égale à la somme de sa partie entière et de tous les éléments de première espèce et de seconde espèce ainsi fabriqués.

Démonstration en ligne

- Si on fait le compte de tous les réels inconnus qu'il faut calculer dans cette décomposition en éléments simples, on arrive à :

Méthodologie

Le nombre de coefficients de type A_k, u_k, v_k à calculer est égal au degré du dénominateur.

Exemple 9 : $D(x) = (x-1)^3(x+2)(x^2+1)^2(x^2+x+1)$ de degré 10, et un numérateur N premier avec D, de degré ≤ 9. Il n'y a pas de partie entière et la décomposition en éléments simples réels de $F(x) = N(x)/D(x)$ sera
$$F(x) = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2} + \frac{gx+h}{x^2+1}$$
avec 10 coefficients à calculer.

Exemple 10 : Avec le même dénominateur mais un numérateur de degré 14, il faudra calculer et ajouter la partie entière, qui sera un polynôme de degré 4, comme quotient de degré 14 par degré 10. Cette division est classique à faire.

Exemple 11 : On a $\dfrac{3x^3-x^2+6}{(x^2+1)(x^2+x+2)}=\dfrac{ax+b}{x^2+1}+\dfrac{cx+d}{x^2+x+2}$.

Exemple 12 : On a $\dfrac{4x^2+x-3}{x^2(x-1)(x+3)}=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{x+3}$.

Méthodologie

Ce paragraphe avait pour but de donner l'aspect théorique de la décomposition d'une fraction en éléments simples sur les réels. Il reste maintenant à voir comment on fait en pratique, dans les cas pas trop compliqués.

5 Décomposition en éléments simples par logiciel

Le logiciel de calcul formel est la solution idéale. Par exemple, avec Xcas qui est gratuit, la commande `convert((3*x+7)/(x^2*(x-1)), parfrac)` nous dit que

$$\frac{3x+7}{x^2(x-1)}=-\frac{7}{x^2}-\frac{10}{x}+\frac{10}{x-1}$$

La commande `convert((3*x^5+6)/(x^2*(x-1)*(x^2+x+1)), parfrac)` nous dit que $\dfrac{3x^5+6}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=3-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3x}{x^2+x+1}$.

6 Décomposition en éléments simples dans les réels : quelques astuces

ATTENTION

Dans ce paragraphe, il est obligatoire que le numérateur de la fraction ait un degré strictement inférieur à celui du dénominateur. Dans le cas général, cela veut dire que l'on a déjà calculé l'éventuelle partie entière par division euclidienne : on décompose alors la fraction qui reste.

- **Première astuce** pour calculer certains coefficients dans les éléments de première espèce. Reprenons l'exemple 12, nous allons pouvoir calculer à la main les inconnues a,c,d sans trop se fatiguer.

  1. **Calcul de a :** reprenons l'écriture théorique de cet exemple, et multiplions à droite et à gauche par x^2. Il vient
  $$\frac{4x^2+x-3}{(x-1)(x+3)}=a+bx+\frac{cx}{x-1}+\frac{dx}{x+3}$$
  Comme il n'y a plus de x au dénominateur, nous avons le droit de faire $x=0$ à gauche et à droite : il reste $(-3)/(-3)=a$, soit $a=1$.
  2. **Calcul de c :** dans l'écriture théorique de l'exemple, multiplions à gauche et à droite par $x-1$. Il vient
  $$\frac{4x^2+x-3}{x^2(x+3)}=c+(x-1)\Big(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{d}{x+3}\Big)$$

On a maintenant le droit de faire $x = 1$ à gauche et à droite, et il vient $2/4 = c$, soit $c = 1/2$. On notera bien que ce calcul n'utilise pas la valeur connue de a.

3. **Calcul de d :** dans l'écriture théorique de l'exemple, multiplions à gauche et à droite par $x+3$. Il vient
$$\frac{4x^2+x-3}{x^2(x-1)} = d + (x+3)\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}\right)$$
On a le droit de faire $x = -3$ partout, et il vient $d = -30/36$, soit $d = -5/6$.

On est donc aisément arrivé à $\dfrac{4x^2+x-3}{x^2(x-1)(x+3)} = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1/2}{x-1}-\dfrac{5/6}{x+3}$. Il reste un unique coefficient à calculer, et on ne peut pas appliquer notre astuce en multipliant par x partout, car il resterait du x en bas, et on ne pourrait pas faire $x = 0$. Récapitulons cette première astuce, en remarquant que multiplier par $(x-a)^m$ revient à « masquer » $(x-a)^m$ au dénominateur de la fraction de gauche :

Astuce Numéro 1

Pour calculer la constante A dans $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ où m est la plus forte puissance intervenant avec le pôle a, on masque $(x-a)^m$ au dénominateur de la fraction de départ, et on fait $x = a$ dans ce qui reste.

◆ **Deuxième astuce** pour calculer certains coefficients. Reprenons l'exemple 12, nous allons pouvoir calculer à la main la valeur de b sans trop se fatiguer. Mais attention, cela nécessite de connaître les valeurs de c et d (celle de a n'intervient pas.) C'est une astuce qui fait intervenir la notion de limite en $+\infty$, et qui assimile donc notre fraction rationnelle à la fonction réelle de la variable réelle associée.

4. **Calcul de b :** dans l'écriture
$$\frac{4x^2+x-3}{x^2(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{1/2}{x-1}-\frac{5/6}{x+3}$$
multiplions à gauche et à droite par x, et faisons tendre x vers $+\infty$. Il vient $\dfrac{4x^2+x-3}{x(x-1)(x+3)} = \dfrac{1}{x}+b+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{5}{6}\dfrac{x}{x+3}$. Quand x tend vers $+\infty$, la fraction de gauche tend vers 0, et à droite la limite est $0+b+1/2-5/6$. Ces deux limites sont égales, et on a donc $b = -1/2+5/6 = 1/3$.

Astuce Numéro 2

Pour calculer la constante A dans $\dfrac{A}{x-a}$, on peut multiplier à gauche et à droite par x, et faire tendre x vers $+\infty$. Mais ceci demande que l'on ait déjà calculé un certain nombre de coefficients.

◆ **Troisième astuce** très simple : donner à x une valeur particulière. Toujours dans le même exemple, on peut faire $x = -1$ à droite et à gauche. Cela donne $0 = 1 - b - 1/4 - 5/12$, d'où l'on tire aussi $b = 1/3$.

Astuce Numéro 3

Donner à x une valeur particulière. Mais ceci demande que l'on ait déjà calculé un certain nombre de coefficients.

- **Nouvelle astuce généralisée** pour calculer deux coefficients d'un coup dans le cadre d'un élément de deuxième espèce. Reprenons l'exemple 11, et multiplions à gauche et à droite par x^2+1. Il vient
$$\frac{3x^3-x^2+6}{x^2+x+2}=ax+b+(x^2+1)\frac{cx+d}{x^2+x+2}$$
On peut maintenant faire $x=i$, quitte à se placer dans les complexes. Il vient $\dfrac{3i^3-i^2+6}{i^2+i+2}=ai+b$, soit $(7-3i)/(1+i)=ai+b$ ou mieux $7-3i=(1+i)(ai+b)=b-a+i(b+a)$. On a $b-a=7,b+a=-3$, ce qui donne $a=-5,b=2$. On a ainsi
$$\frac{3x^3-x^2+6}{(x^2+1)(x^2+x+2)}=\frac{-5x+2}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+2}$$

Astuce Numéro 1 bis

Pour calculer u et v dans $\dfrac{ux+v}{(x^2+px+q)^m}$ où m est la plus forte puissance intervenant avec ce trinôme, on masque $(x^2+px+q)^m$ dans la fraction de départ, et on remplace x par une racine complexe du trinôme dans ce qui reste.

Les risques d'erreur sont élevés si le trinôme a une racine compliquée. À utiliser surtout avec x^2+1.

- Pour terminer l'exemple 11, le plus simple est maintenant d'appliquer les astuces 2 et 3. Quand on multiplie par x et que x tend vers $+\infty$, l'égalité des limites s'écrit $3=-5+c$, soit $c=8$. Pour calculer d, on fait $x=0$, ce qui donne $3=2+d/2$, soit $d=2$.

7 Une façon itérative de procéder

- Voici une façon de procéder par étapes successives, sur un très gros exemple.
$$F(x)=\frac{13-9x+52x^2-23x^3+49x^4-23x^5+4x^6+5x^7-2x^8+6x^9}{(x-1)^3(x+2)(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$$
dont on sait que la décomposition en éléments simples est
$$\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^2}+\frac{gx+h}{x^2+1}$$

1. **L'astuce numéro 1** nous donne assez facilement $A_1=2$ et $B=1$.
2. **On soustrait** alors $\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{x+2}$ à $F(x)$, ce qui donne la fraction moins compliquée
$$F_1(x)=\frac{-5+6x-20x^2+14x^3-22x^4+15x^5-5x^6+5x^7}{(x-1)^2(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$$

avec $F(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} + \dfrac{1}{x+2} + F_1(x)$. On ne s'occupe plus que de F_1.

3. **L'astuce 1** appliquée à F_1 donne $A_2 = -1$. On soustrait $-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ à $F_1(x)$, ce qui donne $F_2(x) = \dfrac{5x^6 + x^5 + 17x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 3x + 4}{(x-1)(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$.
4. **L'astuce 1** appliquée à $F_2(x)$ donne $A_3 = 3$. On soustrait $\dfrac{3}{x-1}$ à $F_2(x)$ et on a $F_3(x) = \dfrac{8x^3 - 1 + 5x + 2x^5}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$.
5. **L'astuce 1 bis** appliquée à $F_3(x)$ avec $(x^2+1)^2$ donne $e = 1, f = -1$. On soustrait $\dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}$ à $F_3(x)$ pour avoir $F_4(x) = \dfrac{5x + 2x^3}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.
6. **L'astuce 1 bis** avec x^2+1 donne $g = 0, h = 3$, et donc $F_4(x) = \dfrac{3}{x^2+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}$. L'astuce 2 appliquée à cette fraction donne $5 = 3 + c$, soit $c = 2$. L'astuce 3 avec $x = 0$ donne $d = -3$. Finalement
$$F(x) = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{2x-3}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{x^2+1}$$

Méthodologie

Cette façon itérative de procéder permet en théorie de décomposer toute fraction rationnelle. En pratique, les soustractions sont très lourdes, et les risques d'erreur sont grands. Mais on n'est jamais confronté à des degrés aussi élevés, quand on décompose à la main. Cette façon de décomposer est utile quand on a un logiciel qui fait les calculs formels classiques, mais qui ne dispose pas de la décomposition automatique en éléments simples.

8 Décomposition en éléments simples dans les complexes, puis les réels

- Soit $F(x) = N(x)/D(x)$ où les polynômes sont à coefficients réels ou complexes. Le dénominateur $D(x)$ se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme $D(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i)^{\alpha_i}$, où les a_i sont ses racines distinctes, réelles ou complexes.

Théorème 3. La décomposition en éléments simples complexes de F est de la forme $\dfrac{N(x)}{D(x)} = E(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{c_{i,j}}{(x-a_i)^j}$, où les $c_{i,j}$ sont des constantes réelles ou complexes et où la partie entière E est un polynôme réel ou complexe.

- La démonstration est une généralisation de celle des pôles réels dans la décomposition sur $\mathbb{R}$.

Méthodologie

Une fraction rationnelle à coefficients réels peut donc se décomposer soit dans les réels soit dans les complexes, suivant ce que l'on veut faire.

Exemple 13 : On a $\dfrac{7x^4-12x^3+11x^2-8x+8}{(x-1)^3(x^2+1)} = \dfrac{3}{(x-1)^3}+\dfrac{7}{x-1}+\dfrac{i}{x+i}-\dfrac{i}{x-i}$, en utilisant uniquement les astuces 1,2,3 détaillées plus haut (et en extrapolant la notion de limite à une expression complexe).

Exemple 14 : Soit $P = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{\alpha_i}$ et $F = P'/P$. La généralisation de la dérivée du produit à k termes nous donne $\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)' = \sum_{i=1}^{k}\left(P_i'\prod_{j\neq i} P_j\right)$ et donc $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i}{X-a_i}$ où les α_i se calculent avec l'astuce 1.

- Si les pôles complexes sont compliqués, même l'astuce 1 peut conduire à des calculs pénibles. Voici une variante de l'astuce 1, valable dans les réels comme dans les complexes, mais réservée au cas d'un pôle simple a, à savoir avec un dénominateur $D(x) = (x-a)D_1(x)$ où D_1 n'est pas divisible par $x-a$:

Astuce 1 et pôle simple

Dans le cas d'un pôle simple a, la constante A du terme $\dfrac{A}{x-a}$ est égale à $\dfrac{N(a)}{D'(a)}$.

Démonstration. En effet, on a $D'(x) = D_1(x) + (x-a)D_1'(x)$ et donc $D'(a) = D_1(a)$. Masquer $x-a$ au dénominateur et faire $x=a$ revient à calculer $D_1(a)$, à savoir $D'(a)$. Voici l'exemple typique où cette nouvelle astuce est très utile :

Exemple 15.a : Décomposer $F(x) = \dfrac{1}{x^7-1}$ sur $\mathbb{C}$. Les 7 pôles sont les $\omega_k = e^{2ik\pi/7}$, pour k de 0 à 6, et on a $F(x) = \sum_{k=0}^{6}\dfrac{A_k}{x-\omega_k}$. On a $D'(x) = 7x^6$, d'où $A_k = \dfrac{1}{7\omega_k^6} = \dfrac{\omega_k}{7\omega_k^7} = \dfrac{\omega_k}{7}$. Il vient $F(x) = \dfrac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\dfrac{\omega_k}{x-\omega_k}$.

Exemple 15.b : On peut en déduire la décomposition dans les réels de cette fraction. Les six racines ω_k pour $1 \leq k \leq 6$ sont deux à deux conjuguées, la conjuguée de ω_1 étant ω_6 et ainsi de suite. Il vient donc

$$F(x) = \frac{1}{7}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\omega_k}{x-\omega_k}+\frac{\overline{\omega_k}}{x-\overline{\omega_k}}\right)$$

Sachant que $\omega_K + \overline{\omega_k} = 2\cos(2k\pi/7)$, on a finalement

$$\frac{7}{x^7-1} = \frac{1}{x-1} + 2\sum_{k=1}^{3}\frac{x\cos(2k\pi/7)-1}{x^2-2\cos(2k\pi/7)+1}$$

9 Utilisation des développements limités

Les développements limités peuvent aider dans la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Voici un exemple typique :

Exemple 16 : $\dfrac{3x^2-x+1}{x^4(x-2)(x^2+1)} = \dfrac{a_0}{x^4}+\dfrac{a_1}{x^3}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_3}{x}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$. Cela s'écrit aussi $\dfrac{3x^2-x+1}{(x-2)(x^2+1)} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^3\times x\left(\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{cx+d}{x^2+1}\right)$. En se plaçant au voisinage de 0, on a le DL à l'ordre 3 de $\dfrac{3x^2-x+1}{(x-2)(x^2+1)}$, le terme en couleur étant le $\varepsilon(x)$. Calculer ce DL va nous donner a_0,a_1,a_2,a_3 d'un seul coup. La division suivant les puissances croissantes donne $-1/2+x/4-7x^2/8-15x^3/16+x^3\varepsilon(x)$. Notre décomposition est donc

$$\frac{3x^2-x+1}{x^4(x-2)(x^2+1)} = -\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{4x^3}-\frac{7}{8x^2}-\frac{15}{16x}+\frac{b}{x-2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Les astuces 1 puis 2 puis 3 (avec $x=0$) donnent $b=11/80$, $c=4/5$ et $d=3/5$.

4 EXERCICES

Je m'entraîne en ligne

Exercice supplémentaire 4
www.lienmini.fr/exalgebre4

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction

$$F(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x(x-1)(x-2)}$$

Exercice 2

Décomposer $F(x) = \dfrac{2x+6}{x(x+1)(x^2+1)^2}$ dans les réels.

Exercice 3

Décomposer sur les réels la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{2x^2 - 4}{x(x^2-1)(x^2+x+1)}$$

4 CORRIGÉS

Exercice 1

1. Attention, le degré du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur, et la fraction rationnelle possède une partie entière. On commence par faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$x^4 + x + 1 = (x^3 - 3x^2 + 2x) \times (x + 3) + 7x^2 - 5x + 1$$

soit $\dfrac{x^4 + x + 1}{x(x-1)(x-2)} = x + 3 + \dfrac{7x^2 - 5x + 1}{x(x-1)(x-2)}$.

2. On applique ensuite trois fois la technique de substitution (astuce 1) à la petite fraction $\dfrac{7x^2 - 5x + 1}{x(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$.

– Masquer x au dénominateur de gauche et faire $x = 0$: $a = 1/2$.
– Masquer $x - 1$ au dénominateur de gauche et faire $x = 1$: $b = -3$.
– Masquer $x - 2$ au dénominateur de gauche et faire $x = 2$: $c = 19/2$.

$$\frac{x^4 + x + 1}{x(x-1)(x-2)} = x + 3 + \frac{1/2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{19/2}{x-2}$$

Exercice 2

On sait que la décomposition est de la forme

$$\frac{2x+6}{x(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{(x^2+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1}$$

– Calcul de a : on masque x et on fait $x = 0$ dans ce qui reste à gauche : $a = 6$.
– Calcul de b : on masque $x + 1$ et on fait $x = -1$ dans ce qui reste à gauche : $b = -1$.
– Calcul de c et d : on masque $(x^2 + 1)^2$ et on fait $x = i$ dans ce qui reste à gauche : $ci + d = (2i + 6)/[i(i + 1)] = -2 - 4i$. On a donc $c = -4$ et $d = -2$.

Première solution : pour calculer e et f : sachant que F comporte le terme $\dfrac{-4x-2}{(x^2+1)^2}$, on le soustrait à la fraction :

$$F(x) - \frac{-4x-2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x+6}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{ex+d}{x^2+1}$$

On multiplie par x^2+1 et on fait $x = i$ dans ce qui reste : $ei+f = (4i+6)/[i(i+1)] = -5i-1$ soit $e = -5$ et $f = -1$, et finalement

$$F(x) = \frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{-5x-1}{x^2+1} - \frac{4x+2}{(x^2+1)^2}$$

Seconde solution : pour calculer e et f : on multiplie par x et on fait tendre x vers l'infini. L'égalité des limites donne $0 = 6 - 1 + e$ soit $e = -5$. On donne ensuite à x une valeur particulière, par exemple $x = 1 : 1 = 6 - 1/2 - 3/2 + (-5 + f)/2$ soit $f = -1$. C'est plus simple.

Exercice 3

La décomposition est de la forme $F(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{dx+e}{x^2+x+1}$.

– Calcul de a : on masque x et on fait $x = 0$ à gauche : $a = 4$.
– Calcul de b : on masque $x - 1$ et on fait $x = 1$ à gauche : $b = -1/3$.
– Calcul de c : on masque $x + 1$ et on fait $x = -1$ à gauche : $c = -1$.

– Calculs de d et e : on multiplie par x^2+x+1 et on fait $x=j$, où j est une racine cubique de l'unité. On utilise $1+j+j^2=0$ et $\overline{j}=j^2$. On a

$$dj+e=\frac{2j^2-4}{j(j^2-1)}=\frac{2j^2-4}{1-j}=\frac{(2j^2-4)(1-j^2)}{(1-j)(1-j^2)}=-\frac{10+8j}{3}$$

soit $e=-10/3$ et $d=-8/3$. Finalement

$$F(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{10+8x}{x^2+x+1}$$

On peut aussi utiliser les astuces 2 et 3 (par exemple avec $x=2$) pour calculer d et e.

COURS

5 Techniques de résolution d'un système linéaire

[MOTS-CLÉS : PIVOT, ÉCHELONNEMENT, INCONNUES PARAMÈTRES, UNICITÉ, COMPATIBLE, IMPOSSIBLE]

Cette fiche explique à partir d'exemples comment résoudre, par échelonnement, un système linéaire de n équations à p inconnues. On travaille dans un corps K quelconque.

1 Position du problème

Une équation linéaire en les p inconnues $x_1,x_2,\cdots x_p$ est de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

où les $a_1,a_2,\cdots,a_p,b$ sont des scalaires connus (éléments du corps K), et où l'on cherche à calculer $x_1,x_2,\cdots,x_p$. Un système linéaire de n équations à p inconnues est composé de n équations linéaires, notées $a_{k,1}x_1 + \cdots a_{k,p}x_p = b_k$, pour $1 \leq k \leq n$. Il peut y avoir autant d'équations que d'inconnues ($n = p$) ou bien plus d'équations que d'inconnues ($n > p$) ou bien plus d'inconnues que d'équations ($p > n$).

Méthodologie

Il y a trois cas de figure possibles :
Une solution unique OU une infinité de solutions OU aucune solution.

Ce résultat est universel, indépendant du nombre d'équations et d'inconnues.
La présente fiche n'a pas pour objectif de dire dans quel cas théorique on a une solution unique ou une infinité de solutions, mais de décrire sur des exemples la technique de la méthode dite du pivot (échelonnement du système), permettant de se ramener à un « système triangulaire » très parlant et permettant de conclure à chaque fois. L'entier n désigne toujours le nombre d'équations initiales et p le nombre d'inconnues.

2 Principe de l'échelonnement, méthode du pivot

- On conserve la première équation E_1 contenant l'inconnue x_1 : on a $a_{1,1} \neq 0$.
- On élimine x_1 de toutes les équations à partir de la deuxième, en remplaçant, pour $2 \leq k \leq n$, chaque équation E_k par $E_k - \lambda_k E_1$ où $\lambda_k = a_{k,1}/a_{1,1}$. Appelons de nouveau $E_2,\cdots,E_n$ les nouvelles équations obtenues, et $a_{k,j}$ le coefficient de x_j dans E_k.
- On élimine x_2 de toutes les équations à partir de la troisième, en remplaçant, pour $3 \leq k \leq n$, chaque équation E_k par $E_k - \lambda_k E_2$ où $\lambda_k = a_{k,2}/a_{2,2}$. On appelle de nouveau $E_3,\cdots,E_n$ les nouvelles équations obtenues.

J'apprends en ligne
www.lienmini.fr/dmalgebre5

Méthodologie

On peut toujours permuter des équations, si cela simplifie les calculs. En particulier, prendre pour E_1 l'équation la plus simple contenant x_1.

- Et ainsi de suite jusqu'à la dernière équation. Ensuite, on regarde le nouveau système obtenu, qui est « triangulaire » et on conclut. On dit que l'on a échelonné le système.

Méthodologie

Le nombre final d'équations après échelonnement peut rester égal à n mais il peut aussi diminuer : on enlève les équations devenant « 0=0 ». Cela arrive quand les équations initiales ne sont pas indépendantes, et que certaines ne servent à rien. Si l'on a une équation « 0=1 », le système est impossible.

3 Exemple 1 : une unique solution

Soit le système S_1 : $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ 2x & -y & +3z & & = & 1 \\ -2x & +2y & -3z & +t & = & 0 \\ x & +4y & & -5t & = & -22 \end{array}\right.$.

- Étape 1 : on enlève x de E_2,E_3,E_4 en remplaçant E_2 par E_2-2E_1, E_3 par E_3+2E_2 et E_4 par $E_4 - E_1$. Il vient S_2 :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ & -3y & -z & +2t & = & 13 \\ & 4y & +z & -t & = & -12 \\ & 3y & -2z & -4t & = & -16 \end{array}\right.$$

- Étape 2 : on conserve E_1 et E_2. On enlève y de E_3 et E_4 en remplaçant E_3 par $E_3 + 4/3E_2$ et E_4 par $E_4 + E_2$. Il vient S_3 :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ & -3y & -z & +2t & = & 13 \\ & & -z/3 & +5t/3 & = & 16/3 \\ & & -3z & -2t & = & -3 \end{array}\right.$$

- Étape 3 : on conserve E_1,E_2 et E_3. On enlève z de E_4 en la remplaçant par $E_4 - 9E_3$. Il vient S_4 : $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ & -3y & -z & +2t & = & 13 \\ & & -z/3 & +5t/3 & = & 16/3 \\ & & & -17t & = & -51 \end{array}\right.$.

Méthodologie

Il faut impérativement bien présenter les calculs comme cela est fait ci-dessus, en alignant les variables en colonne, pour avoir une écriture visuellement triangulaire des systèmes. Sinon on voit mal et on se trompe.

- Étape 4 : on peut maintenant résoudre, en commençant par la dernière équation qui donne $t = 3$. On reporte dans la troisième équation, ce qui donne $z = -1$. On reporte dans la deuxième équation, ce qui donne $y = -2$. Le report dans la première équation donne $x = 1$. Le système admet une solution unique.

  Remarque : dans le système S_3, on pouvait multiplier E_3 par 3, pour se débarrasser des dénominateurs.

4 Exemple 2 : une infinité de solutions

Soit le système S_1 : $\begin{cases} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ 2x & -y & +3z & & = & 1 \\ -2x & +2y & -3z & +t & = & 0 \end{cases}$ à 3 équations et 4 inconnues.

Il s'agit du système du paragraphe précédent, privé de sa dernière équation. Les calculs des deux premières étapes ne sont pas réécrits, et on arrive, après multiplication par 3 de la dernière équation, au système S_3 :

$$\begin{cases} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ & -3y & -z & +2t & = & 13 \\ & & -z & +5t & = & 16 \end{cases}$$

La situation est complètement différente : on peut donner à t n'importe quelle valeur, en déduire z, puis y puis x. Il va donc y avoir une infinité de solutions. On considère t comme un « paramètre », et on exprime $z = 5t - 16$ avec la dernière équation. La deuxième équation de S_3 nous donne $3y = -z + 2t - 13 = -5t + 16 + 2t - 13$, soit $y = -t + 1$. La première équation de S_3 donne $x = -y - 2z + t - 6 = -8t + 25$.

Méthodologie

Quand le système admet, au départ ou après triangulation, **moins** d'équations que d'inconnues, il ne peut pas admettre une solution unique. Soit il en admet une infinité, soit il est impossible.

- Le théorème suivant précise les choses :

Théorème 1. Soit un système de n équations à p inconnues, se ramenant après échelonnement à un système de r équations **(avec $r < p$)** admettant au moins une solution.
Alors il admet une infinité de solutions, qui dépendent de $\boldsymbol{p - r}$ paramètres.

Démonstration en ligne

5 Exemple 3 : système impossible

Soit le système S_1 : $\begin{cases} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ 2x & -y & +3z & & = & 1 \\ -2x & +2y & -3z & +t & = & 0 \\ -x & +3y & -z & & = & 9 \end{cases}$

Ce sont toujours les mêmes trois premières équations, mais la quatrième est modifiée. Les deux premières étapes sont toujours les mêmes, et donnent S_3 :

$$\begin{cases} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ & -3y & -z & +2t & = & 13 \\ & & -z/3 & +5t/3 & = & 16/3 \\ & & -z/3 & +5t/3 & = & 61/3 \end{cases}$$

On enlève z de E_4 en remplaçant E_4 par $E_4 - E_3$, et il vient

$$S_4 : \begin{cases} x & +y & +2z & -t & = & -6 \\ & -3y & -z & +2t & = & 13 \\ & & -z/3 & +5t/3 & = & 16/3 \\ & & & 0t & = & 15 \end{cases}$$

La dernière équation est « $0 = 15$ » et est impossible : le système n'a pas de solution. Il était d'ailleurs inutile de former S_4, on voyait tout de suite dans S_3 que les deux dernières équations donnaient une impossibilité.

6 Exemple 4 : plus d'équations que d'inconnues

Soit $S_1 : \begin{cases} x & +2y & -3z & = 5 \\ 2x & -y & +z & = 6 \\ -2x & +y & +3z & = 0 \\ 9x & -2y & -11z & = 11 \end{cases}$, avec 4 équations et seulement 3 inconnues.

On remplace E_2 par $E_2 - 2E_1$, E_3 par $E_3 + 2E_1$ et E_4 par $E_4 - 9E_1$ de façon à enlever l'inconnue x des trois dernières équations. Il vient

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & = & 5 \\ & -5y & +7z & = & -4 \\ & 5y & -3z & = & 10 \\ & -20y & +16z & = & -34 \end{cases}$$

On enlève ensuite l'inconnue y de E_3 et de E_4 en remplaçant E_3 par $E_3 + E_2$ et E_4 par $E_4 - 4E_2$. Il vient alors

$$\begin{cases} x & +2y & -3z & = & 5 \\ & -5y & +7z & = & -4 \\ & & 4z & = & 6 \\ & & -12z & = & -18 \end{cases}$$

Si on ne voit pas que les deux dernières équations sont proportionnelles, on fait $E_4 + 3E_3$ et on arrive à $\begin{cases} x & +2y & -3z & = & 5 \\ & -5y & +7z & = & -4 \\ & & 4z & = & 6 \\ & & 0z & = & 0 \end{cases}$. La dernière équation ne sert à rien, et on a en fait le système $\begin{cases} x & +2y & -3z & = & 5 \\ & -5y & +7z & = & -4 \\ & & 4z & = & 6 \end{cases}$. La dernière équation nous donne $z = 3/2$. En remplaçant dans la deuxième équation, il vient $y = 29/10$. En reportant les valeurs de y et z dans la première équation, il vient $x = 37/10$. Le système admet une unique solution.

Méthodologie

Quand on a plus d'équations que d'inconnues, on a tendance à se dire qu'il y a plus de contraintes que de degrés de liberté, et que les choses sont impossibles. Attention, rien à voir ! Les trois cas sont possibles : solution unique, infinité de solutions, impossible.

7 Quand voit-on qu'il y a unicité de la solution ?

- C'est uniquement en fin de triangulation que l'on voit visuellement si le système admet une solution unique :

Méthodologie

En fin de triangulation, une fois enlevées les équations « 0=0 », quand le système admet **autant d'équations que d'inconnues**, et qu'aucune n'est de la forme impossible « 0=1 », alors le système admet une unique solution.

- En effet, le système est échelonné, et tous les coefficients « diagonaux » sont différents de 0. On le remonte avec unicité pour chaque inconnue.

8 Programmation d'une étape de pivot

- Voici une programmation effectuant le travail suivant : étant donnée une matrice a, un numéro i de ligne et un numéro j de colonne, mettre un 0 en colonne j dans toutes les lignes à partir de la ligne $i+1$, exactement comme on le fait à la main. Les instructions nrows et ncols donnent le nombre de lignes (ligne=row) et de colonnes de a.

```
pour k de 1+i jusque nrows(a) faire
  t:= a[k,j]/a[i,j] ;
  pour m de j jusque ncols(a) faire
    a[k,m]:=a[k,m]-a[i,m]*t;
  fpour;
fpour;
```

- Le logiciel Xcas, gratuit et souvent utilisé dans cet ouvrage, a l'inconvénient de [généralement] numéroter de 0 à $n-1$ les numéros de ligne (et de 0 à $p-1$ les numéros de colonne) dans une matrice de dimensions $n \times p$. Cela complique un peu la programmation.

9 Résolution avec Xcas

Beaucoup de logiciels de calcul formel effectuent directement la résolution de systèmes linéaires. Attention, quand le premier membre contient des paramètres, aucune discussion n'est faite (voir l'exercice 3 en ligne pour une discussion exhaustive). Voici un exemple utilisant Xcas (gratuit), travaillant autour du système

$$\begin{cases} x & +5y & +5z & = & 1 \\ 2x & & -z & = & 5 \\ 4x & +7y & +3z & = & -6 \end{cases}$$

Il y a deux instructions Xcas pour effectuer la résolution.

- Sous la forme $AX = B$. La matrice A doit être carrée (autant d'inconnues que d'équations). On utilise l'instruction `simult` :

  ```
  A:=matrix([[1,5,5],[2,0,-1],[4,7,3]]); B:=matrix([[1],[5],[-6]]);
  sol:=simult(A,B);
  ```

  Elle renvoie un vecteur sol =(137/27, -161/27,139/27) contenant les solutions. Si on a besoin de les utiliser, on les récupère par sol[0] pour x, sol[1] pour y et sol[2] pour z. Attention, dans Xcas, les composantes sont numérotées de 0 à $n-1$ et pas de 1 à n comme on fait normalement. Attention aussi à bien mettre tous les crochets comme indiqué.
- En détaillant les équations, sans matrice. On utilise l'instruction `linsolve` :

  ```
  eq1:=x+5*y+5*z ; eq2:=2*x-z ; eq3:=4*x+7*y+3*z;
  sol:=linsolve([eq1=1, eq2=5, eq3=-6],[x,y,z]);
  ```

  On récupère les valeurs de x,y,z comme précédemment. La première ligne qui donne des noms aux équations n'est pas indispensable : on peut taper directement le détail de chaque équation dans `linsolve`.
  L'instruction `linsolve` permet d'avoir plus d'inconnues que d'équations (ou l'inverse), et donc d'obtenir des solutions dépendant d'un paramètre. Avec

  $$\begin{cases} x & +5y & +5z & +4t & = & 1 \\ 2x & & -z & -t & = & 5 \\ 4x & +7y & +3z & +6t & = & -6 \end{cases}$$

  on demande

  ```
  eq1:=x+5*y+5*z+4t ; eq2:=2*x-z-t ; eq3:=4*x+7*y+3*z+6t;
  sol:=linsolve([eq1=1, eq2=5, eq3=-6],[x,y,z,t]);
  ```

  On obtient une infinité de solutions, exprimées (pour une raison ou une autre) en prenant t comme variable paramètre. Il vient :

  ```
  ( 22 t/27+137/27, -43t/27-161/27, 17t/27+139/27,t)
  ```

  On peut aussi, le cas échéant, imposer la variable qui va être paramètre. Mais il faut avoir de bonnes raisons mathématiques de savoir que cela est possible. Par exemple, si on veut imposer que x soit le paramètre, on remplace [x,y,z,t] par [y,z,t] seulement, en enlevant le paramètre souhaité x.

Toutes les maths

ALGÈBRE ET PROBABILITÉS EN 62 FICHES

L1
L2
CAPES

Ce livre regroupe l'ensemble de l'algèbre linéaire et générale, de la théorie des graphes et des probabilités couramment enseignés en **L1-L2** et au sein des **CPGE.** Véritable **outil pratique,** ses **62 fiches** mettent en valeur toutes les notions importantes que les étudiants doivent maîtriser.

Dans le livre :

- L'ensemble des énoncés de cours
- Certaines démonstrations essentielles
- Une partie des exemples et des exercices corrigés

En fiches téléchargeables facilement accessibles :

- La majorité des démonstrations
- Une partie des exemples et des exercices corrigés
- L'ensemble des problèmes récapitulatifs

Ce livre est aussi une excellente base pour s'entraîner à la préparation aux concours de l'enseignement.

L'auteur

François Cottet-Emard a enseigné l'algèbre et les probabilités à l'Université de Paris-Saclay en licence.

Retrouvez aussi :

ISBN : 978-2-8073-2850-1

9 782807 328501

www.deboecksuperieur.com